>

> with(plots) :

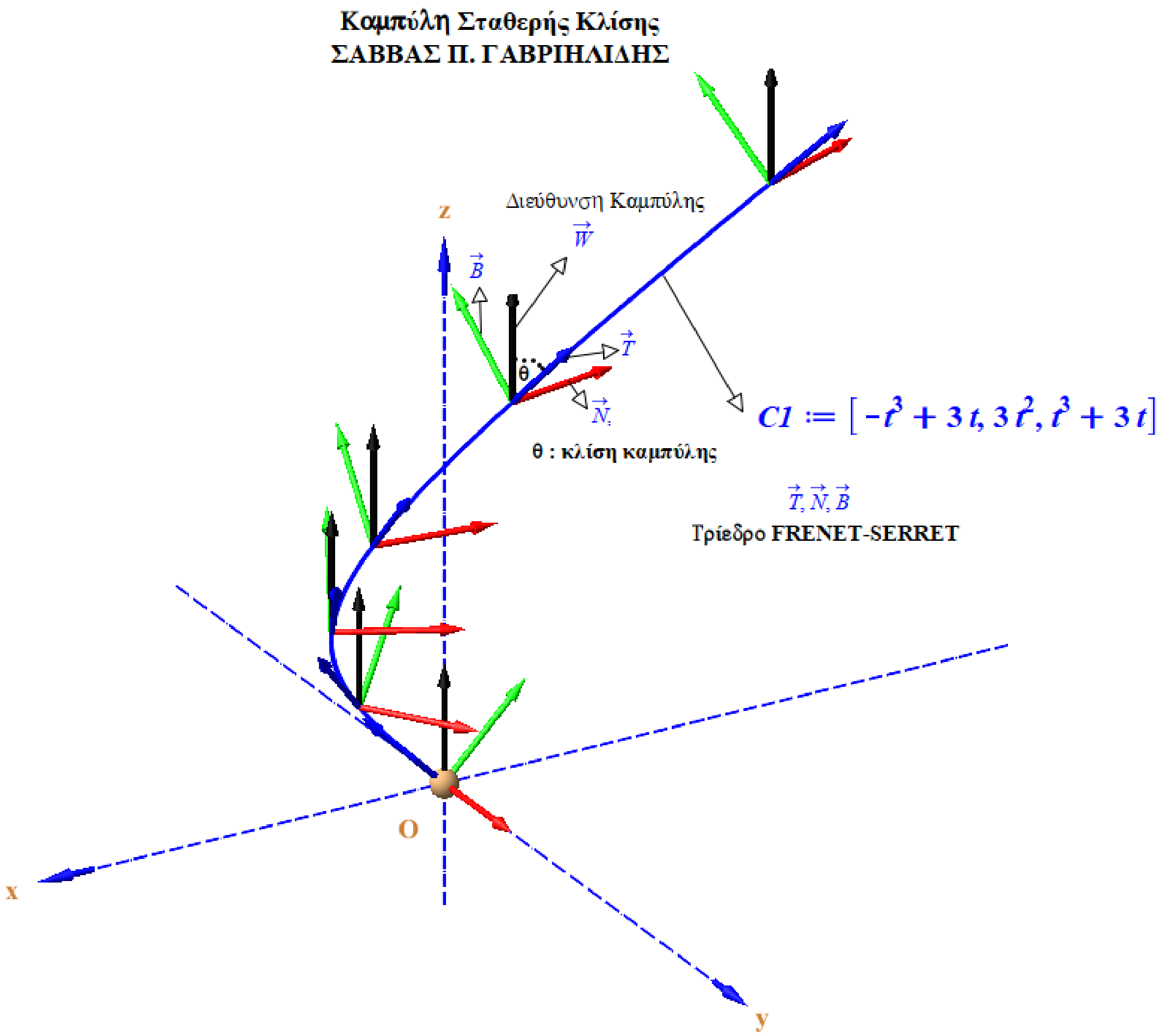
> with(Physics[Vectors]) :

> Setup(mathematicalnotation = true) :

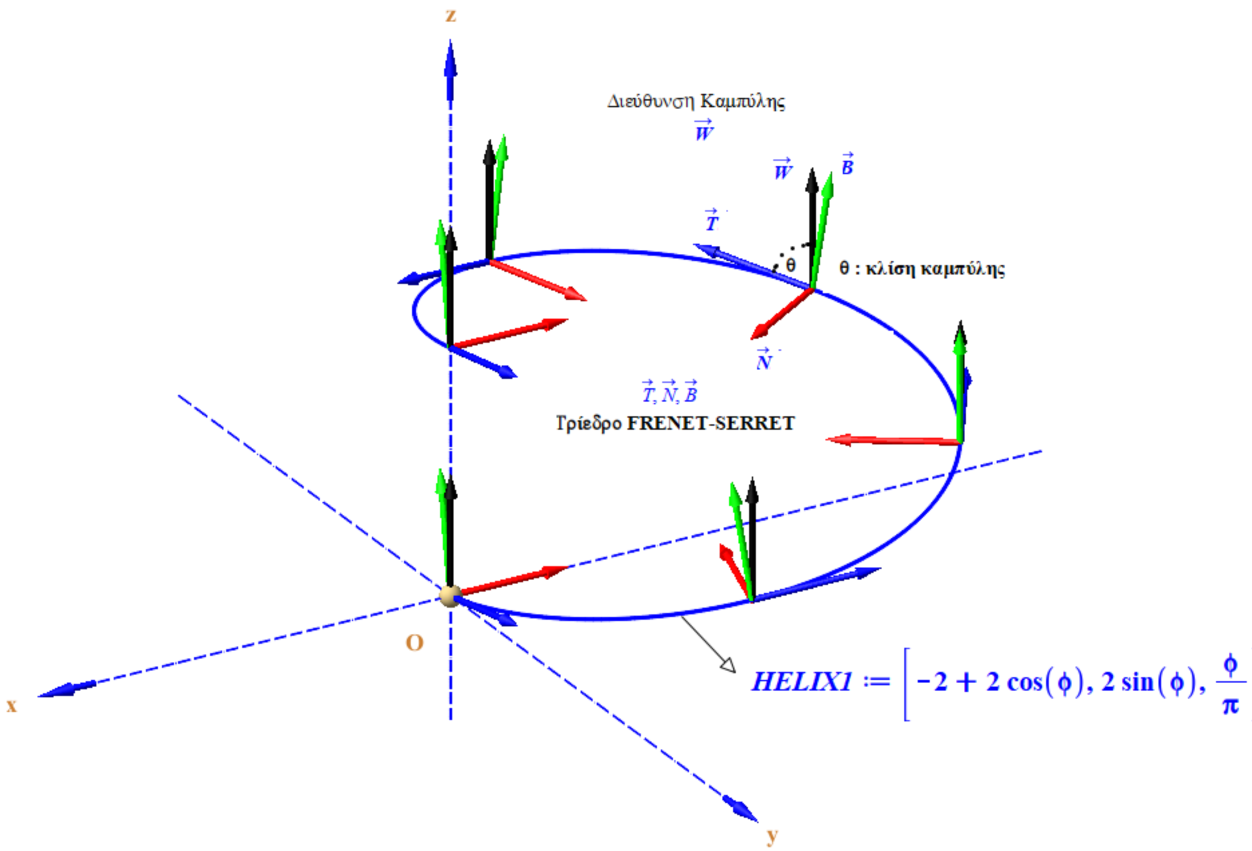
> with(RealDomain) :

>

>



Καμπύλη Σταθερής Κλίσης
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



Ελέγχουμε εάν η παραμετροποίηση της Περιστρεφόμενης Καμπύλης γίνεται ως προς Φυσική παράμετρο (Καμπύλη Μοναδιαίας Ταχύτητας) .
$Norm\left(\frac{d}{du}\vec{r}\right) = 1$.
Υπάρχει αναπαραμέτρηση που να ικανοποιεί την ως άνω απαίτηση .

<u>Παράδειγμα</u> : Έστω κύκλος στο συντεταγμένο επίπεδο xz ακτίνας ρ :
Μία παραμέτρηση είναι : $\vec{r} := \rho\cdot\cos(\phi)\cdot\vec{i} + \rho\cdot\sin(\phi)\cdot\vec{k} \Rightarrow Norm\left(\frac{d}{d\phi}\vec{r}\right) = \rho \neq 1$

Η αναπαραμέτρηση γιά να είναι $Norm\left(\frac{d}{d\phi}\vec{r}\right) = 1$:

$$s = \int_0^{\phi} Norm\left(\frac{d}{d\phi}\vec{r}\right) d\phi = \rho\cdot\phi \Rightarrow \phi = \frac{s}{\rho} \Rightarrow \vec{r} := \rho\cdot\cos\left(\frac{s}{\rho}\right)\cdot\vec{i} + \rho\cdot\sin\left(\frac{s}{\rho}\right)\cdot\vec{k}, \; Norm\left(\frac{d}{ds}\vec{r}\right) = 1.$$

\>

\> $R\_ := \rho\cdot\cos(\phi)\cdot\_i + \rho\cdot\sin(\phi)\cdot\_k$

$$\vec{R} := \rho\cos(\phi)\,\hat{i} + \rho\sin(\phi)\,\hat{k} \quad \textbf{(1)}$$

\> $simplify(Norm(diff(R\_, \phi)))$

$$\rho \quad \textbf{(2)}$$

\> $\langle \rho\cos(\phi), 0, \rho\sin(\phi)\rangle$

$$\begin{bmatrix} \rho \cos(\phi) \\ 0 \\ \rho \sin(\phi) \end{bmatrix} \tag{3}$$

> $s = int((\mathbf{2}), \phi = 0..\phi)$

$$s = \rho\,\phi \tag{4}$$

> $solve((\mathbf{4}), \phi)$

$$\frac{s}{\rho} \tag{5}$$

> $subs(\phi = (\mathbf{5}), (\mathbf{1}))$

$$\rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \hat{i} + \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \hat{k} \tag{6}$$

> $simplify(Norm(diff((\mathbf{6}), s)))$

$$1 \tag{7}$$

> $\left\langle \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right), 0, \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \right\rangle$

$$\begin{bmatrix} \rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \\ \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \end{bmatrix} \tag{8}$$

> $VectorCalculus[TNBFrame]((\mathbf{3}), \phi)$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\phi) \\ 0 \\ \cos(\phi) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos(\phi) \\ 0 \\ -\sin(\phi) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

> $VectorCalculus[TNBFrame]((\mathbf{8}), s)$

$$\begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \\ \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \\ 0 \\ -\sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

>

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΒΛΑΧΟΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2020

3. Δίνεται η καμπύλη $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με

$$c(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι είναι καμπύλη σταθερής κλίσης και να βρεθεί σταθερό διάνυσμα (δηλαδή η διεύθυνσή της) το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με όλες τις εφαπτόμενες ευθείες της καμπύλης c.

> $C1 := [3 \cdot t - t^3, 3 \cdot t^2, 3 \cdot t + t^3]$

$$C1 := \left[-t^3 + 3\,t, 3\,t^2, t^3 + 3\,t\right] \tag{11}$$

> $C := \langle 3 \cdot t - t^3, 3 \cdot t^2, 3 \cdot t + t^3 \rangle$

$$C := \begin{bmatrix} -t^3 + 3\,t \\ 3\,t^2 \\ t^3 + 3\,t \end{bmatrix} \tag{12}$$

> $r\_ := C[1] \cdot \_i + C[2] \cdot \_j + C[3] \cdot \_k$

$$\vec{r} := \left(-t^3 + 3\,t\right)\,\hat{i} + 3\,t^2\,\hat{j} + \left(t^3 + 3\,t\right)\,\hat{k} \tag{13}$$

> $T := simplify(VectorCalculus[TNBFrame](C)[1])$

(14)

$$T := \begin{bmatrix} \frac{(-t^2+1)\sqrt{2}}{2t^2+2} \\ \frac{\sqrt{2}\,t}{t^2+1} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{14}$$

> $T[1]$

$$\frac{(-t^2+1)\sqrt{2}}{2t^2+2} \tag{15}$$

> $T[2]$

$$\frac{\sqrt{2}\,t}{t^2+1} \tag{16}$$

> $T[3]$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{17}$$

> $VectorCalculus[Norm]((\mathbf{14}))$

$$1 \tag{18}$$

> $t\_ := T[1]\cdot\_i + T[2]\cdot\_j + T[3]\cdot\_k$

$$\vec{t} := \frac{(-t^2+1)\sqrt{2}\,\hat{i}}{2t^2+2} + \frac{\sqrt{2}\,t\,\hat{j}}{t^2+1} + \frac{\sqrt{2}\,\hat{k}}{2} \tag{19}$$

> $N := simplify(VectorCalculus[TNBFrame](C)[2])$

$$N := \begin{bmatrix} -\frac{2t}{t^2+1} \\ \frac{-t^2+1}{t^2+1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

> $N[1]$

$$-\frac{2t}{t^2+1} \tag{21}$$

> $N[2]$

$$\frac{-t^2+1}{t^2+1} \tag{22}$$

> $N[3]$

$$0 \tag{23}$$

> $VectorCalculus[Norm]((\mathbf{20}))$

$$1 \tag{24}$$

> $B := simplify(VectorCalculus[TNBFrame](C)[3])$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{(t^2-1)\sqrt{2}}{2t^2+2} \\ -\frac{\sqrt{2}\,t}{t^2+1} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

> $B[1]$

$$\frac{(t^2-1)\sqrt{2}}{2t^2+2} \quad (26)$$

> $B[2]$

$$-\frac{\sqrt{2}\,t}{t^2+1} \quad (27)$$

> $B[3]$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (28)$$

> $VectorCalculus[Norm]((\mathbf{25}))$

$$1 \quad (29)$$

> $b\_ := B[1]\cdot\_i + B[2]\cdot\_j + B[3]\cdot\_k$

$$\vec{b} := \frac{(t^2-1)\sqrt{2}\,\hat{i}}{2t^2+2} - \frac{\sqrt{2}\,t\,\hat{j}}{t^2+1} + \frac{\sqrt{2}\,\hat{k}}{2} \quad (30)$$

> $TORSION := simplify(VectorCalculus[Torsion](C))$

$$TORSION := \frac{1}{3\,(t^2+1)^2} \quad (31)$$

> $CURVATURE := simplify(VectorCalculus[Curvature](C))$

$$CURVATURE := \frac{1}{3\,(t^2+1)^2} \quad (32)$$

> $\frac{TORSION}{CURVATURE} = \cot(x)$

$$1 = \cot(x) \quad (33)$$

> $solve((\mathbf{33}), x)$

$$\frac{\pi}{4} \quad (34)$$

> $w\_ := \cos\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right)\cdot t\_ + \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{4}\right)\cdot b\_$

$$\vec{w} := \hat{k} \quad (35)$$

> $simplify(Norm(w\_))$

$$1 \tag{36}$$

> $simplify(w\_ \cdot t\_)$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{37}$$

> $simplify(w\_ \cdot b\_)$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{38}$$

> $\cos(\theta) \cdot t\_ + \sin(\theta) \cdot b\_$

$$\hat{i}\left(\frac{\cos(\theta)\,(-t^2+1)\sqrt{2}}{2\,t^2+2} + \frac{\sin(\theta)\,(t^2-1)\sqrt{2}}{2\,t^2+2}\right) + \hat{j}\left(\frac{\cos(\theta)\sqrt{2}\,t}{t^2+1} - \frac{\sin(\theta)\sqrt{2}\,t}{t^2+1}\right) + \hat{k}\left(\frac{\cos(\theta)\sqrt{2}}{2} + \frac{\sin(\theta)\sqrt{2}}{2}\right) \tag{39}$$

> $simplify((\cos(\theta) \cdot t\_ + \sin(\theta) \cdot b\_\ ) \cdot t\_)$

$$\cos(\theta) \tag{40}$$

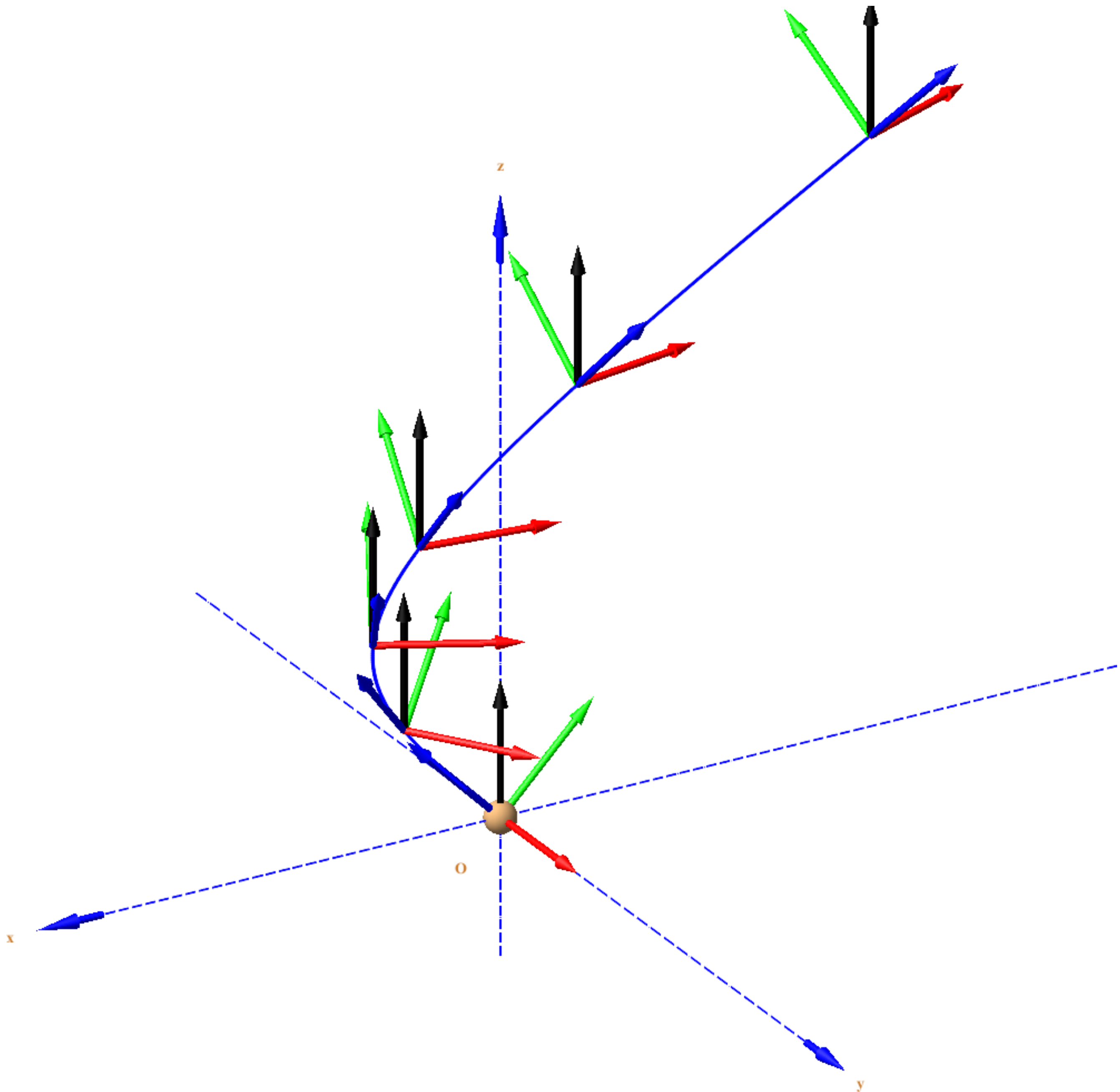
> $simplify((\cos(\theta) \cdot t\_ + \sin(\theta) \cdot b\_\ ) \cdot b\_)$

$$\sin(\theta) \tag{41}$$

```
> A := 2 :
> B := 3 :
> H := 2 :
> OO := pointplot3d([0, 0, 0], symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :
>
> axX := spacecurve([x, 0, 0], x =- (A + 3) ..A + 1, linestyle = 3, thickness = 1, color = blue) :
> axY := spacecurve([0, y, 0], y =- (B + 1) ..(B + 1), linestyle = 3, thickness = 1, color = blue) :
> axZ := spacecurve([0, 0, z], z =- H/2 ..H + 2, linestyle = 3, thickness = 2, color = blue) :
>
> ARaxX := arrow([(A + 1), 0, 0], [0.5, 0, 0], width = 0.05, head_length = 0.3, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
> ARaxY := arrow([0, (B + 1), 0], [0, 0.5, 0], width = 0.05, head_length = 0.3, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
> ARaxZ := arrow([0, 0, (H + 2)], [0, 0, 0.5], width = 0.05, head_length = 0.3, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
>
> tX := textplot3d([(A + 1.7), 0.0, 0, "x"], color = gold, font = [arial, bold, 14]) :
> tY := textplot3d([0, (B + 1.7), 0, "y"], color = gold, font = [arial, bold, 14]) :
> tZ := textplot3d([0, 0, (H + 2.7), "z"], color = gold, font = [arial, bold, 14]) :
> tO := textplot3d([0 + 0.3, 0, -0.3, "O"], color = gold, font = [arial, bold, 14]) :
> AXONES := display(OO, axX, axY, axZ, ARaxX, ARaxY, ARaxZ, tX, tY, tZ, tO, scaling
      = constrained, axes = none, orientation = [60, 65, 0], lightmodel = light4) :
```

```
>
> CP1 := spacecurve(C1, t = 0 ..1.5 , color = blue, thickness = 3) :
> pp1 := animate(arrow, [[C1[1], C1[2], C1[3]], [0, 0, 1], color = black, scaling = constrained,
        axes = none], t = 0 ..1.5, frames = 45, trace = 5) :
> ppT := animate(arrow, [[C1[1], C1[2], C1[3]], [T[1], T[2], T[3]], color = blue, scaling
        = constrained, axes = none], t = 0 ..1.5, frames = 45, trace = 5, ) :
> ppN := animate(arrow, [[C1[1], C1[2], C1[3]], [N[1], N[2], N[3]], color = red, scaling
        = constrained, axes = none], t = 0 ..1.5, frames = 45 , trace = 5, ) :
> ppB := animate(arrow, [[C1[1], C1[2], C1[3]], [(26), (27), (28)], color = green, scaling
        = constrained, axes = none], t = 0 ..1.5, frames = 45, trace = 5) :
>
> display(AXONES, CP1, pp1, ppT, ppN, ppB, title
        = "Καμπύλη Σταθερής Κλίσης\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 14])
```

Καμπύλη Σταθερής Κλίσης
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



>
>

Θεώρημα 2.4.1. *Μια κανονική καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με παντού θετική καμπυλότητα k και στρέψη τ είναι καμπύλη σταθερής κλίσης αν και μόνο αν η συνάρτηση τ/k είναι σταθερή.*

2.4 Καμπύλες σταθερής κλίσης

Ορισμός 2.4.1. *Μια κανονική καμπύλη c του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ καλείται* **καμπύλη σταθερής κλίσης** *αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα το οποίο σχηματίζει σταθερή γωνία με κάθε εφαπτομένη ευθεία της καμπύλης c.*

Με άλλα λόγια μια καμπύλη είναι καμπύλη σταθερής κλίσης αν υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα w τέτοιο ώστε το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα $\vec{t}$ της καμπύλης να πληροί παντού τη σχέση

$$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos\varphi,$$

όπου φ είναι η σταθερή γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα w με κάθε εφαπτομένη ευθεία.

Το διάνυσμα w συχνά αναφέρεται ως η **διεύθυνση** της καμπύλης σταθερής κλίσης, ενώ η σταθερή γωνία φ ως **κλίση** της.

Οι επίπεδες καμπύλες καθώς και οι κυλινδρικές έλικες είναι καμπύλες σταθερής κλίσης (ποιά είναι η διεύθυνση και ποιά η κλίση τους;).

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας δίνει ένα χαρακτηρισμό για τις καμπύλες σταθερής κλίσης μέσω της καμπυλότητας και της στρέψης.

Θεώρημα 2.4.1. *Μια κανονική καμπύλη του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^3$ με παντού θετική καμπυλότητα k και στρέψη τ είναι καμπύλη σταθερής κλίσης αν και μόνο αν η συνάρτηση τ/k είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Έστω καμπύλη $c\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και παντού θετική καμπυλότητα k.

Υποθέτουμε ότι η καμπύλη c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα w τέτοιο ώστε

$$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos\varphi,$$

όπου φ σταθερή γωνία.

Παραγωγίζοντας και κάνοντας χρήση της πρώτης εξίσωσης Frenet, λαμβάνουμε

$$\langle \vec{n}, w \rangle = 0.$$

Επομένως είναι

$$w = \langle w, \vec{t} \rangle \, \vec{t} + \langle w, \vec{b} \rangle \, \vec{b},$$

ή ισοδύναμα

$$w = \cos\varphi \, \vec{t} + \sin\varphi \, \vec{b}.$$

Παραγωγίζοντας την ανωτέρω και κάνοντας χρήση της πρώτης και τρίτης εξίσωσης Frenet, βρίσκουμε ότι

$$\frac{\tau}{k} = \cot\varphi.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι

$$\boxed{\frac{\tau}{k} = \cot\varphi} \tag{2.8}$$

για κάποια σταθερή γωνία φ. Θεωρούμε τη λεία διανυσματική συνάρτηση $W\colon I \to \mathbb{R}^3$ με

$$W(s) = \cos\varphi \, \vec{t}(s) + \sin\varphi \, \vec{b}(s), \quad s \in I.$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων Frenet και της ισότητας (2.8), προκύπτει ότι

$$\frac{dW}{ds}(s) = 0,$$

για κάθε $s \in I$. Επομένως είναι $W(s) = w$ ανεξάρτητο του s. Προφανώς ισχύει

$$\langle \vec{t}, w \rangle = \cos\varphi,$$

το οποίο σημαίνει ότι η καμπύλη c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης. $\square$

Οι επίπεδες καμπύλες καθώς και οι κυλινδρικές έλικες είναι καμπύλες σταθερής κλίσης (ποιά είναι η διεύθυνση και ποιά η κλίση τους;).

$$\boldsymbol{HELIX := \left[-a + a\cdot\cos(\phi), + b\cdot\sin(\phi), \frac{BHMA\cdot\phi}{2\cdot Pi}\right]}$$

> $BHMA := 2$

$$BHMA := 2 \tag{42}$$

> $a := 2$

$$a := 2 \tag{43}$$

> $b := 2$

$$b := 2 \tag{44}$$

> $\boldsymbol{(-a + a\cdot\cos(\phi))\cdot\_i + (b\cdot\sin(\phi))\cdot\_j + \left(\frac{BHMA}{2\cdot Pi}\cdot\phi\right)\cdot\_k}$

$$(-2 + 2\cos(\phi))\,\hat{i} + 2\sin(\phi)\,\hat{j} + \frac{\phi\,\hat{k}}{\pi} \tag{45}$$

> $\boldsymbol{HELIX} := \langle Component(\mathbf{(45)}, 1), Component(\mathbf{(45)}, 2), Component(\mathbf{(45)}, 3)\rangle$

$$HELIX := \begin{bmatrix} -2 + 2\cos(\phi) \\ 2\sin(\phi) \\ \frac{\phi}{\pi} \end{bmatrix} \tag{46}$$

> $\boldsymbol{HELIX1} := [Component(\mathbf{(45)}, 1), Component(\mathbf{(45)}, 2), Component(\mathbf{(45)}, 3)]$

$$\boldsymbol{HELIX1 := \left[-2 + 2\cos(\phi), 2\sin(\phi), \frac{\phi}{\pi}\right]} \tag{47}$$

> $VectorCalculus[TNBFrame](HELIX)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2\pi\sin(\phi)}{\sqrt{4\pi^2+1}} \\ \frac{2\pi\cos(\phi)}{\sqrt{4\pi^2+1}} \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{4\pi^2+1}} \\ -\frac{\cos(\phi)}{\sqrt{4\pi^2+1}} \\ \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2+1}} \end{bmatrix} \tag{48}$$

> $t1\_ := \mathbf{(48)}[1][1]\cdot\_i + \mathbf{(48)}[1][2]\cdot\_j + \mathbf{(48)}[1][3]\cdot\_k$

(49)

$$\vec{t1} := -\frac{2\,\pi \sin(\phi)\,\hat{i}}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} + \frac{2\,\pi \cos(\phi)\,\hat{j}}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} + \frac{\hat{k}}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} \quad \textbf{(49)}$$

> $b1\_ := \mathbf{(48)}[3][1]\cdot\_i + \mathbf{(48)}[3][2]\cdot\_j + \mathbf{(48)}[3][3]\cdot\_k$

$$\vec{b1} := \frac{\sin(\phi)\,\hat{i}}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} - \frac{\cos(\phi)\,\hat{j}}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} + \frac{2\,\pi\,\hat{k}}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} \quad \textbf{(50)}$$

> $n1\_ := \mathbf{(48)}[2][1]\cdot\_i + \mathbf{(48)}[2][2]\cdot\_j + \mathbf{(48)}[2][3]\cdot\_k$

$$\vec{n1} := -\hat{i}\,\cos(\phi) - \sin(\phi)\,\hat{j} \quad \textbf{(51)}$$

> $TORS := simplify(VectorCalculus[Torsion](HELIX))$

$$TORS := \frac{\pi}{4\,\pi^2+1} \quad \textbf{(52)}$$

> $CURBAT := simplify(VectorCalculus[Curvature](HELIX))$

$$CURBAT := \frac{2\,\pi^2}{4\,\pi^2+1} \quad \textbf{(53)}$$

> $simplify\left(\frac{TORS}{CURBAT}\right) = \cot(x)$

$$\frac{1}{2\,\pi} = \cot(x) \quad \textbf{(54)}$$

> $solve(\mathbf{(54)}, x)$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2\,\pi}\right) \quad \textbf{(55)}$$

> $W\_ := \cos(\theta)\cdot t1\_ + \sin(\theta)\cdot b1\_$

$$\vec{W} := \hat{i}\left(-\frac{2\cos(\theta)\,\pi\sin(\phi)}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} + \frac{\sin(\theta)\,\sin(\phi)}{\sqrt{4\,\pi^2+1}}\right) + \hat{j}\left(\frac{2\cos(\theta)\,\pi\cos(\phi)}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} - \frac{\sin(\theta)\,\cos(\phi)}{\sqrt{4\,\pi^2+1}}\right) + \hat{k}\left(\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{4\,\pi^2+1}} + \frac{2\sin(\theta)\,\pi}{\sqrt{4\,\pi^2+1}}\right) \quad \textbf{(56)}$$

> $Norm(W\_)$

$$\left(\frac{\sin(\phi)^2\,(2\,\pi\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}{4\,\pi^2+1} + \frac{\cos(\phi)^2\,(2\,\pi\cos(\theta) - \sin(\theta))^2}{4\,\pi^2+1} + \frac{(2\sin(\theta)\,\pi + \cos(\theta))^2}{4\,\pi^2+1}\right)^{1/2} \quad \textbf{(57)}$$

> $simplify(\,\mathbf{(57)}, 'symbolic'\,)$

$$1 \quad \textbf{(58)}$$

> $simplify(\,(\cos(\theta)\cdot t1\_ + \sin(\theta)\cdot b1\_\,)\cdot t1\_)$

$$\cos(\theta) \quad \textbf{(59)}$$

> $simplify((\cos(\theta)\cdot t1\_ + \sin(\theta)\cdot b1\_\ )\bullet b1\_)$

$$\sin(\theta) \quad (60)$$

> $simplify((\cos(\theta)\cdot t1\_ + \sin(\theta)\cdot b1\_\ )\bullet n1\_)$

$$0 \quad (61)$$

>

> $W\_.\_i$

$$-\frac{\sin(\phi)\,(2\,\pi\cos(\theta) - \sin(\theta))}{\sqrt{4\,\pi^2 + 1}} \quad (62)$$

> $W\_.\_j$

$$\frac{\cos(\phi)\,(2\,\pi\cos(\theta) - \sin(\theta))}{\sqrt{4\,\pi^2 + 1}} \quad (63)$$

> $W\_.\_k$

$$\frac{2\sin(\theta)\,\pi + \cos(\theta)}{\sqrt{4\,\pi^2 + 1}} \quad (64)$$

> $simplify(subs([\phi = \phi, \theta = \mathbf{(55)}], W\_.\_i\ ))$

$$0 \quad (65)$$

> $simplify(subs([\phi = \phi, \theta = \mathbf{(55)}], W\_.\_j\ ))$

$$0 \quad (66)$$

> $simplify(subs([\phi = \phi, \theta = \mathbf{(55)}], W\_.\_k))$

$$1 \quad (67)$$

> $\boldsymbol{W1\_ := 1\cdot\_k}$

$$\overrightarrow{W1} := \hat{k} \quad (68)$$

> $W1\_.\_i$

$$0 \quad (69)$$

> $W1\_.\_j$

$$0 \quad (70)$$

> $W1\_.\_k$

$$1 \quad (71)$$

> $\boldsymbol{evalf(W1\_ \bullet t1\_\ )}$

$$0.1571767254 \quad (72)$$

> $\boldsymbol{evalf(W1\_ \bullet b1\_\ )}$

$$0.9875704918 \quad (73)$$

> $\frac{\cos^{-1}(\mathbf{(72)})\cdot 180}{\mathrm{Pi}}$

$$80.95693894 \quad (74)$$

> $\frac{\cos^{-1}((\mathbf{73}))\cdot 180}{\mathrm{Pi}}$

$$9.043061204 \tag{75}$$

> **(74)** + **(75)**

$$90.00000014 \tag{76}$$

> $evalf(subs(\phi = \phi, HELIX))$

$$\begin{bmatrix} -2. + 2.\cos(\phi) \\ 2.\sin(\phi) \\ 0.3183098861\,\phi \end{bmatrix} \tag{77}$$

> **(77)**[1]

$$-2. + 2.\cos(\phi) \tag{78}$$

> **(77)**[2]

$$2.\sin(\phi) \tag{79}$$

> **(77)**[3]

$$0.3183098861\,\phi \tag{80}$$

> **(48)**[1][1]

$$-\frac{2\pi\sin(\phi)}{\sqrt{4\pi^2+1}} \tag{81}$$

> **(48)**[1][2]

$$\frac{2\pi\cos(\phi)}{\sqrt{4\pi^2+1}} \tag{82}$$

> **(48)**[1][3]

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi^2+1}} \tag{83}$$

> **(48)**[2][1]

$$-\cos(\phi) \tag{84}$$

> **(48)**[2][2]

$$-\sin(\phi) \tag{85}$$

> **(48)**[2][3]

$$0 \tag{86}$$

> **(48)**[3][1]

$$\frac{\sin(\phi)}{\sqrt{4\pi^2+1}} \tag{87}$$

> **(48)**[3][2]

(88)

$$-\frac{\cos(\phi)}{\sqrt{4\pi^2+1}} \qquad \textbf{(88)}$$

> **(48)**[3][3]

$$\frac{2\pi}{\sqrt{4\pi^2+1}} \qquad \textbf{(89)}$$

>

> $CP := spacecurve(HELIX1, \phi = 0..2\cdot\mathrm{Pi}, color = blue, thickness = 3)$:

> $p1 := animate(arrow, [[\textbf{(78)}, \textbf{(79)}, \textbf{(80)}], [0, 0, 1], color = black, scaling = constrained, axes = none], \phi = 0..2\pi, frames = 45, trace = 5)$:

> $pT := animate(arrow, [[\textbf{(78)}, \textbf{(79)}, \textbf{(80)}], [\textbf{(48)}[1][1], \textbf{(48)}[1][2], \textbf{(48)}[1][3]], color = blue, scaling = constrained, axes = none], \phi = 0..2\pi, frames = 45, trace = 5)$:

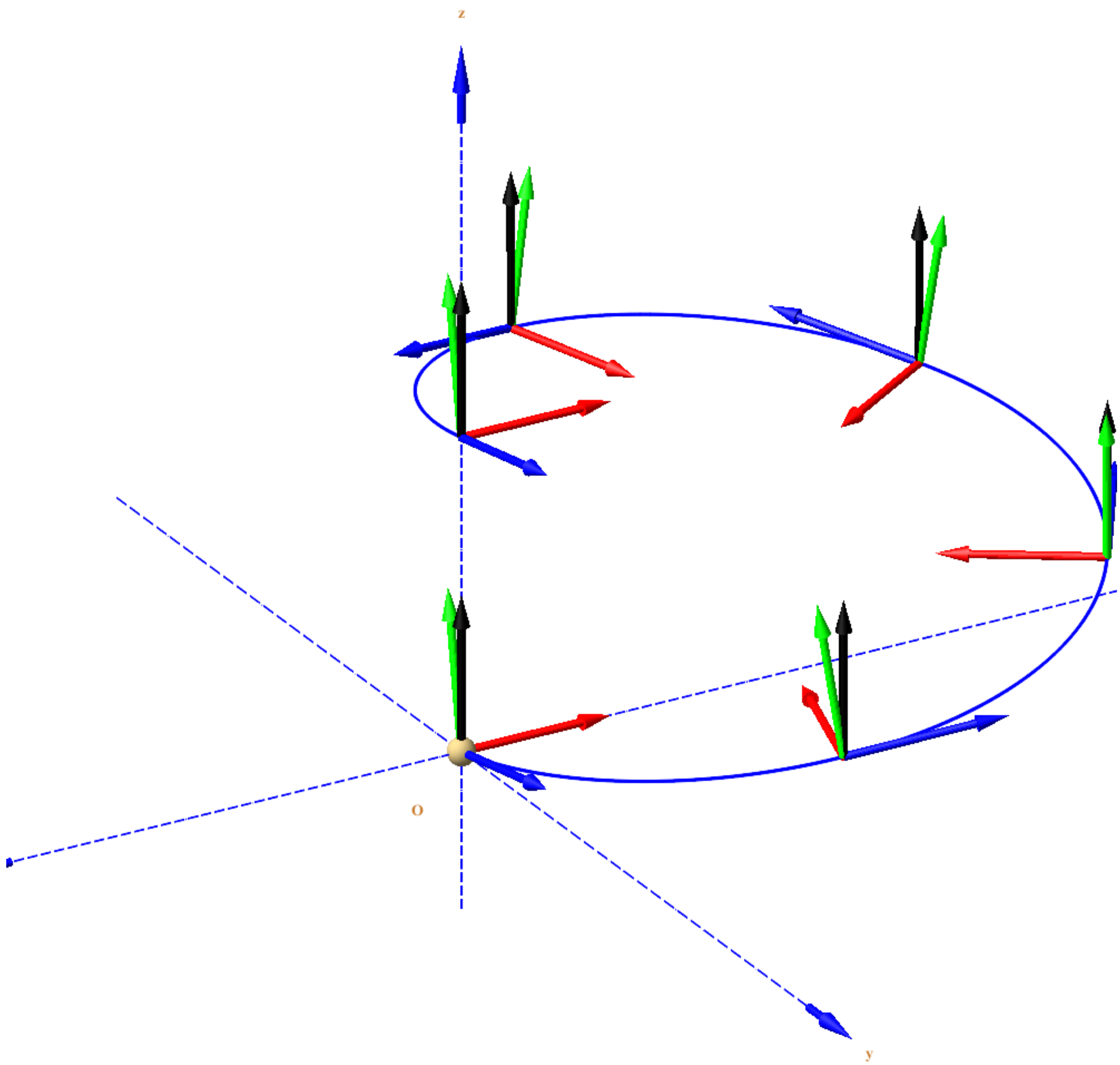
> $pN := animate(arrow, [[\textbf{(78)}, \textbf{(79)}, \textbf{(80)}], [\textbf{(48)}[2][1], \textbf{(48)}[2][2], \textbf{(48)}[2][3]], color = red, scaling = constrained, axes = none], \phi = 0..2\pi, frames = 45, trace = 5)$:

> $pB := animate(arrow, [[\textbf{(78)}, \textbf{(79)}, \textbf{(80)}], [\textbf{(48)}[3][1], \textbf{(48)}[3][2], \textbf{(48)}[3][3]], color = green, scaling = constrained, axes = none], \phi = 0..2\pi, frames = 45, trace = 5)$:

>

> *display*(*AXONES*, *CP*, *p1*, *pT*, *pN*, *pB*, *title* = "Καμπύλη Σταθερής Κλίσης\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", *titlefont* = [*arial*, *bold*, 14])

Καμπύλη Σταθερής Κλίσης
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



>