

```

>
> with(plots) :
> with(Physics[Vectors])
[&x, '+', '\', ChangeBasis, ChangeCoordinates, Component, Curl, DirectionalDiff, Divergence,
  Gradient, Identify, Laplacian, ∇, Norm, ParametrizeCurve, ParametrizeSurface,
  ParametrizeVolume, Setup, diff, int]
> Setup(mathematicalnotation = true)
[mathematicalnotation = true]

```

Δίδεται η (αυτοτεμνόμενη) Επιφάνεια του Enneper :

$$S := \left[u - \frac{u^3}{3} + u \cdot v^2, v - \frac{v^3}{3} + v \cdot u^2, u^2 - v^2 \right] :$$

(Πρόκειται περί Ελαχιστικής Επιφάνειας , Μέση καμπυλότητα $H=0$)

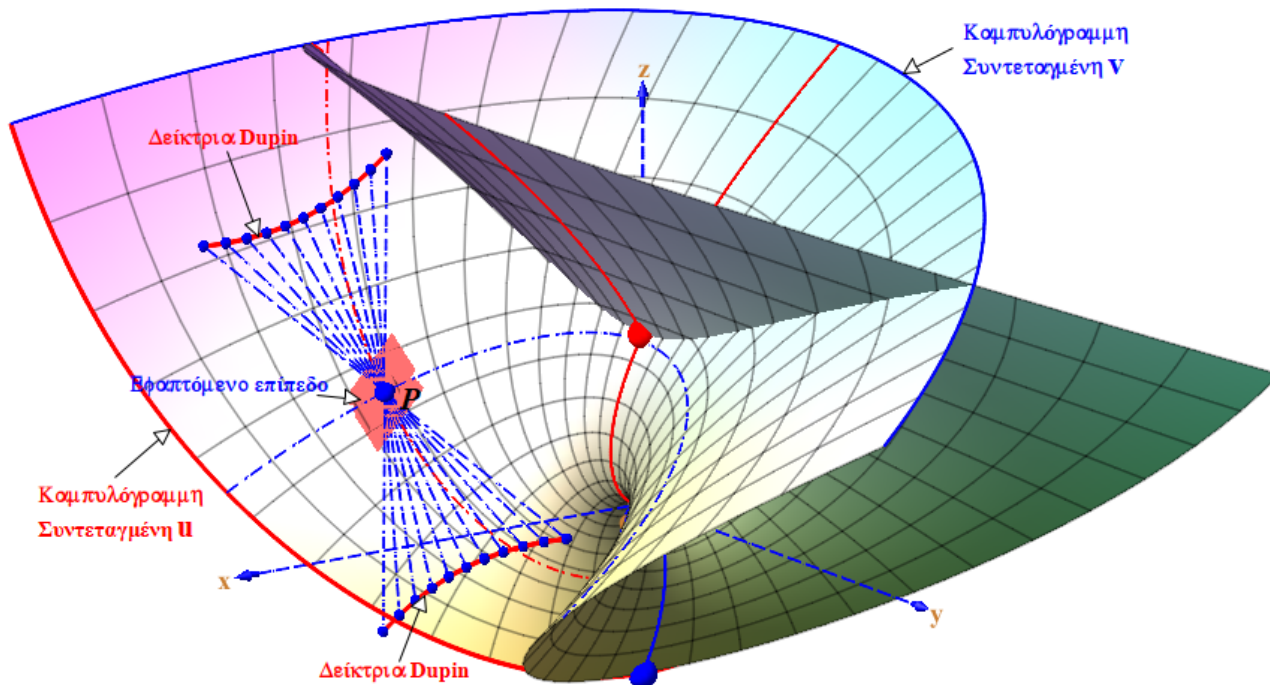
Να υπολογίσουμε :

1. Τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης E, F, G και δεύτερης L, M, N τάξης της επιφάνειας
2. Το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{N}$ σε κάθε σημείο της Επιφάνειας (απεικόνιση Gauss) .
3. Τον τελεστή σχήματος , την καμπυλότητα Gauss
4. Την μέση καμπυλότητα
5. Τις κύριες καμπυλότητες
6. Εξίσωση Δείκτης Dupin στο σημείο P ..

Να απεικονίσουμε την ΔΕΙΚΤΡΙΑ του DUPIN της Επιφάνειας στο σημείο P (Υπερβολικό) .

Να διεγείρουμε με Animation την κίνηση της Ακτίνας Καμπυλότητας της δείκτης του Dupin .

ΑΥΤΟΤΕΜΝΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΝΝΕΡ & ΔΕΙΚΤΡΙΑ DUPIN
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



Δίδεται η (αυτοτεμνόμενη) Επιφάνεια του Enneper :

$$S := \left[u - \frac{u^3}{3} + u \cdot v^2, v - \frac{v^3}{3} + v \cdot u^2, u^2 - v^2 \right] :$$

(Πρόκειται περί Ελαχιστικής Επιφάνειας , Μέση καμπυλότητα H=0)

$$\begin{aligned} > S := \left[u - \frac{u^3}{3} + u \cdot v^2, v - \frac{v^3}{3} + v \cdot u^2, u^2 - v^2 \right] \\ & S := \left[u - \frac{1}{3} u^3 + u v^2, v - \frac{1}{3} v^3 + v u^2, u^2 - v^2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} > S1 := \left\langle u - \frac{u^3}{3} + u \cdot v^2, v - \frac{v^3}{3} + v \cdot u^2, u^2 - v^2 \right\rangle : \\ > r_- := \left(u - \frac{u^3}{3} + u \cdot v^2 \right) \cdot \underline{i} + \left(v - \frac{v^3}{3} + v \cdot u^2 \right) \cdot \underline{j} + (u^2 - v^2) \cdot \underline{k} \\ & \vec{r} := \left(u - \frac{1}{3} u^3 + u v^2 \right) \hat{i} + \left(v - \frac{1}{3} v^3 + v u^2 \right) \hat{j} + (u^2 - v^2) \hat{k} \end{aligned} \quad (4)$$

1a . Θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης .

$$\begin{aligned} > E := \text{simplify}(\text{diff}(r_-, u) \cdot \text{diff}(r_-, u)) \\ & E := (u^2 + v^2 + 1)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} > F := \text{diff}(r_-, u) \cdot \text{diff}(r_-, v) \\ & F := 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} > G := \text{simplify}(\text{diff}(r_{_}, v) \cdot \text{diff}(r_{_}, v)) \\ & \qquad \qquad \qquad G := (u^2 + v^2 + 1)^2 \end{aligned} \quad (7)$$

1b . Θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης .

$$\begin{aligned} > N_{_} := \text{collect}\left(\text{simplify}\left(\frac{(\text{diff}(r_{_}, u) \times \text{diff}(r_{_}, v))}{\text{Norm}(\text{diff}(r_{_}, u) \times \text{diff}(r_{_}, v))}, \text{symbolic}\right), \{_{_}i, _{_}j, _{_}k\}\right) : \\ > \text{simplify}(\text{Norm}(N_{_})) \\ & \qquad \qquad \qquad 1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} > L := -\text{diff}(r_{_}, u) \cdot \text{diff}(N_{_}, u) \\ & \qquad \qquad \qquad L := 2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} > M := -\frac{1}{2} \cdot (\text{diff}(r_{_}, u) \cdot \text{diff}(N_{_}, v) + \text{diff}(r_{_}, v) \cdot \text{diff}(N_{_}, u)) \\ & \qquad \qquad \qquad M := 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} > N := -\text{diff}(r_{_}, v) \cdot \text{diff}(N_{_}, v) \\ & \qquad \qquad \qquad N := -2 \end{aligned} \quad (11)$$

2 .Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην Επιφάνεια . (Απεικόνιση Gauss).

$$\begin{aligned} > a := 1.7 \\ & \qquad \qquad \qquad a := 1.7 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} > b := -1.2 \\ & \qquad \qquad \qquad b := -1.2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} > c := \frac{\text{Pi}}{3} \\ & \qquad \qquad \qquad c := \frac{\pi}{3} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} > rP_{_} := \text{subs}(\{u=a, v=b\}, r_{_}) \\ & \qquad \qquad \qquad \vec{rP} := 2.510333333 \hat{i} - 4.092000000 \hat{j} + 1.45 \hat{k} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} > N_{_} := \text{collect}\left(\text{simplify}\left(\frac{(\text{diff}(r_{_}, u) \times \text{diff}(r_{_}, v))}{\text{Norm}(\text{diff}(r_{_}, u) \times \text{diff}(r_{_}, v))}, \text{symbolic}\right), \{_{_}i, _{_}j, _{_}k\}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad \vec{N} := -\frac{2 u \hat{i}}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{2 v \hat{j}}{u^2 + v^2 + 1} + \frac{(-u^2 - v^2 + 1) \hat{k}}{u^2 + v^2 + 1} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} > \text{evalf}(\text{subs}(\{u=a, v=b\}, r_{_})) \\ & \qquad \qquad \qquad 2.510333333 \hat{i} - 4.092000000 \hat{j} + 1.45 \hat{k} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} > P := [\text{Component}((17), 1), \text{Component}((17), 2), \text{Component}((17), 3)] \\ & \qquad \qquad \qquad P := [2.510333333, -4.092000000, 1.45] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &> PKATHETODIANYSMA := evalf(subs(\{u=a, v=b\}, N_)) \\ &PKATHETODIANYSMA := -0.6378986866 \hat{i} - 0.4502814258 \hat{j} - 0.6247654784 \hat{k} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &> Norm((19)) \\ &0.9999999999 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &> n_ := [Component((19), 1), Component((19), 2), Component((19), 3)] \\ &\vec{n} := [-0.6378986866, -0.4502814258, -0.6247654784] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &> PEFAPTOMENOEPIPEDO := ((x - P[1]) \cdot _i + (y - P[2]) \cdot _j + (z - P[3]) \cdot _k) \cdot (19) = 0 \\ &PEFAPTOMENOEPIPEDO := -0.6378986866 x + 0.6646966857 - 0.4502814258 y \\ &- 0.6247654784 z = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &> isolate((22), z) \\ &z = -1.021021021 x + 1.063913915 - 0.7207207208 y \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &> PEFAP := [x, y, rhs((23))] \\ &PEFAP := [x, y, -1.021021021 x + 1.063913915 - 0.7207207208 y] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &> TpUU_ := evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \frac{diff(r_ , u)}{Norm(diff(r_ , u))}\right)\right) \\ &\vec{TpUU} := -0.08442776736 \hat{i} - 0.7654784241 \hat{j} + 0.6378986867 \hat{k} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &> Norm((25)) \\ &1.0000000000 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &> TUU_ := [Component((25), 1), Component((25), 2), Component((25), 3)] \\ &\vec{TUU} := [-0.08442776736, -0.7654784241, 0.6378986867] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &> TpVV_ := evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \frac{diff(r_ , v)}{Norm(diff(r_ , v))}\right)\right) \\ &\vec{TpVV} := -0.7654784241 \hat{i} + 0.4596622890 \hat{j} + 0.4502814259 \hat{k} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &> Norm((28)) \\ &1.0000000000 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &> TVV_ := [Component((28), 1), Component((28), 2), Component((28), 3)] \\ &\vec{TVV} := [-0.7654784241, 0.4596622890, 0.4502814259] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &> rI_ := x \cdot _i + y \cdot _j + z \cdot _k : \\ &> nI_ := subs(\{u=a, v=b\}, N_) \\ &n\vec{I} := -0.6378986866 \hat{i} - 0.4502814258 \hat{j} - 0.6247654784 \hat{k} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &> PKATHETOEPIPEDOUU := evalf(subs(\{u=a, v=b\}, (rP_ - rI_).(nI_ \times TpUU_))) = 0 \\ &PKATHETOEPIPEDOUU := -3.149636021 + 0.7654784240 x - 0.4596622889 y \\ &- 0.4502814259 z = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

>

Θεωρία :

Μία καμπύλη (*Curve*) επί της Επιφανείας *S* και που περνάει από το σημείο $P(u=a, v=b)$

$t=0$:

$$Curve := subs(\{u=c \cdot t + a, v=b + t\}, S)$$

Όλες οι καμπύλες επί της Επιφανείας που περνούν από το σημείο $P(u=a, v=b)$ και εκεί εφάπτονται στην ίδια ευθεία (που περνά από το $P(u=a, v=b)$) έχουν την ίδια κάθετη καμπυλότητα=Καμπυλότητα της Επιφάνειας στο σημείο $P(u=a, v=b)$ κατά την διεύθυνση της Εφαπτομένης της καμπύλης στο $P(u=a, v=b)$.

$$Curve := subs(t=v-b, c \cdot t + a) \Rightarrow Curve = c(v-b) + a$$

$$\frac{du}{dv} = diff(Curve, v) = c, \quad c = 0..2 \cdot \pi$$

$$a := 4 :$$

$$b := -4 :$$

$$c := \frac{\pi}{3} :$$

$$Curve := subs(\{u=c \cdot t + a, v=b + t\}, S)$$

$$PCurve := evalf(subs(t=0, Curve))$$

$$u := v \rightarrow c \cdot (v - b) + a$$

$$\cdot diff(u(v), v) = \frac{\pi}{3}$$

Μία καμπύλη επί της Επιφανείας και που περνάει από το σημείο : $P(u=a, v=b)$

Καμπυλότητα της Επιφάνειας στο P κατά την διεύθυνση της Εφαπτομένης της καμπύλης Curve στο P

Να υπολογισθούν η παράγωγος του μήκους : $\frac{d}{dt}s$

και η καμπυλότητα της επιφάνειας στο P .

$$\text{Υπολογισμός της παραγώγου του μήκους : } \frac{d}{dt}s \quad diff(s(t), t) = \sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2 \cdot F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2} :$$

$$diff(s(t), t) = \sqrt{E \cdot (diff(u(t), t))^2 + 2 \cdot F \cdot diff(u(t), t) \cdot diff(v(t), t) + G \cdot (diff(v(t), t))^2} : \quad (2.191)$$

Υπολογισμός της καμπυλότητας της επιφάνειας στο P .

$$U := \frac{diff(u(t), t)}{diff(s(t), t)} : \quad (2.191)$$

$$V := \frac{diff(v(t), t)}{diff(s(t), t)} :$$

$$K := L \cdot U^2 + 2 \cdot M \cdot U \cdot V + N \cdot V^2 :$$

$$> Curve := subs(\{u=c \cdot t + a, v=b + t\}, S)$$

$$Curve := \left[\frac{\pi t}{3} + 1.7 - \frac{\left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^3}{3} + \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right) (-1.2 + t)^2, -1.2 + t - \frac{(-1.2 + t)^3}{3} \right. \\ \left. + (-1.2 + t) \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^2, \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^2 - (-1.2 + t)^2 \right] \quad (33)$$

$$> PCurve := evalf(subs(t=0, Curve))$$

$$PCurve := [2.510333333, -4.092000000, 1.45] \quad (34)$$

$$> c \cdot (v - b) + a$$

$$\frac{\pi (v + 1.2)}{3} + 1.7 \quad (35)$$

$$> u := v \rightarrow (35)$$

$$u := v \mapsto \frac{\pi \cdot (v + 1.2)}{3} + 1.7 \quad (36)$$

> diff(u(v), v)

$$\frac{\pi}{3} \quad (37)$$

> rC_ := Curve[1]·_i + Curve[2]·_j + Curve[3]·_k

$$\begin{aligned} \vec{rC} := & (0.3333333333 \pi t + 1.7 - 0.3333333333 (0.3333333333 \pi t + 1.7)^3 \\ & + (0.3333333333 \pi t + 1.7) (-1.2 + t)^2) \hat{i} + (-1.2 + t - 0.3333333333 (-1.2 + t)^3 + \\ & -1.2 + t) (0.3333333333 \pi t + 1.7)^2) \hat{j} + ((0.3333333333 \pi t + 1.7)^2 - 1. (-1.2 + t)^2) \hat{k} \end{aligned} \quad (38)$$

> subs(t=0, \frac{diff(rC_, t)}{Norm(diff(rC_, t))})

$$-0.5897151441 \hat{i} - 0.2361543307 \hat{j} + 0.7723128780 \hat{k} \quad (39)$$

> Norm((39))

$$1.0000000000 \quad (40)$$

> KATHETOPIPEDOCC := evalf(subs({u=a, v=b}, (rP_ - rI_).(nI_ × (39)))) = 0

$$\begin{aligned} KATHETOPIPEDOCC := & -4.933548745 + 0.4952992173 x - 0.8610910346 y \\ & + 0.1148952385 z = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

> ANGLE(u - C) := cos⁻¹(evalf(subs({u=a, v=b, t=0}, \frac{diff(r_, u)}{Norm(diff(r_, u))} · \frac{diff(rC_, t)}{Norm(diff(rC_, t))})))

$$ANGLE(u - C) := 0.7623475334 \quad (42)$$

> \frac{(42) \cdot 180}{\text{Pi}} degree

$$43.67929618 \text{ arcdeg} \quad (43)$$

> ANGLE(v - C) := cos⁻¹(evalf(subs({u=a, v=b, t=0}, \frac{diff(r_, v)}{Norm(diff(r_, v))} · \frac{diff(rC_, t)}{Norm(diff(rC_, t))})))

$$ANGLE(v - C) := 0.8084487923 \quad (44)$$

> \frac{(44) \cdot 180}{\text{Pi}} degree

$$46.32070374 \text{ arcdeg} \quad (45)$$

>

Καμπυλότητα (Κάθετη) της Curve με εφαρμογή του τύπου του EULER .

> evalf(k[max]·cos²(ANGLE(u - C)) + k[min]·sin²(ANGLE(u - C)))

$$0.00324440099 \quad (46)$$

>

Καμπυλότητα (Κάθετη) της Curve με εφαρμογή άλλης μεθόδου .!!!!(Πλήρης

ταύτιση).

>

$$\begin{aligned} > \text{subs}\left(t=0, \left(\text{Student}[\text{VectorCalculus}][\text{TNBFrame}] \left(\left\langle \frac{\pi t}{3} + 1.7 - \frac{\left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^3}{3} + \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right) \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. (-1.2 + t)^2, -1.2 + t - \frac{(-1.2 + t)^3}{3} + (-1.2 + t) \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^2, \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^2 \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. - (-1.2 + t)^2 \right\rangle \right) \right) [2] \right) \right) \\ & \quad \begin{bmatrix} -0.5095664779 \\ 0.8507117880 \\ -0.1289630130 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} > \text{subs}\left(t=0, \left(\text{Student}[\text{VectorCalculus}][\text{Curvature}] \left(\left\langle \frac{\pi t}{3} + 1.7 - \frac{\left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^3}{3} + \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right) \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. (-1.2 + t)^2, -1.2 + t - \frac{(-1.2 + t)^3}{3} + (-1.2 + t) \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^2, \left(\frac{\pi t}{3} + 1.7\right)^2 \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. - (-1.2 + t)^2 \right\rangle \right) \right) \right) \right) \\ & \quad 0.1437884605 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} > KK_ := (48) \cdot ((47)[1] \cdot _i + (47)[2] \cdot _j + (47)[3] \cdot _k) \\ & \quad \overrightarrow{KK} := -0.07326977938 \hat{i} + 0.1223225383 \hat{j} - 0.01854339310 \hat{k} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} > KK_ \cdot \text{subs}([u=a, v=b], N_) \\ & \quad 0.00324440094 \end{aligned} \quad (50)$$

>

>

Καμπυλότητα της Επιφάνειας στο P κατά την διεύθυνση της Εφαπτομένης της καμπύλης Curve στο P .

>

> Curve := subs({u=c·t+a, v=b+t}, S) :

> subs(t=0, diff(c·t+a, t))

$$\frac{\pi}{3} \quad (51)$$

> subs(t=0, diff(b+t, t))

$$1 \quad (52)$$

$$\begin{aligned} &> dS := evalf\left(\text{subs}\left(\{u=a, v=b, t=0\}, \sqrt{E \cdot (51)^2 + 2 \cdot F \cdot (51) \cdot (52) + G \cdot (52)^2}\right)\right) \\ &\quad dS := 7.717690390 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} &> U1 := simplify\left(\frac{(51)}{dS}\right) \\ &\quad U1 := 0.1356879452 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} &> V1 := simplify\left(\frac{(52)}{dS}\right) \\ &\quad V1 := 0.1295724432 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} &> \text{Kepifan} := evalf\left(\text{subs}\left(\{u=a, v=b\}, L \cdot U1^2 + 2 \cdot M \cdot U1 \cdot V1 + N \cdot V1^2\right)\right) \\ &\quad \text{Kepifan} := 0.00324440086 \end{aligned} \quad (56)$$

>

Καμπυλότητα της Επιφάνειας στο P κατά την διεύθυνση της Εφαπτομένης της καμπύλης Curve στο P .
Συναρτήσει της $c = C$ χωρίς βλάβη της γενικότητας

$$\begin{aligned} &> KE := evalf\left(\text{subs}\left(\{u=a, v=b, t=0, C=c\}, \left(\frac{L \cdot C^2 + 2 \cdot M \cdot C + N}{dS^2}\right)\right)\right) \\ &\quad KE := 0.00324440090 \end{aligned} \quad (57)$$

>

ΠΛΗΡΗΣ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ. !!!

>

>

>

3 .

Τελεστής Σχήματος στο τυχαίο σημείο $p = \vec{r}(u, v) \in M$

$$[S_p] = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{E \cdot G - F^2} \cdot \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι οι ΚΥΡΙΕΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΕΣ $k[1], k[2]$.

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι οι κύριες κατευθύνσεις των ΚΥΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Η οριζούσα του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι η
Καμπυλότητα Gauss

Το $(1/2)$ ·ίχνος του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι η
Μέση Καμπυλότητα

ΕΑΝ η Καμπυλότητα Gauss είναι παντού ≤ 0 , η επιφάνεια είναι ΕΥΘΕΙΟΓΕΝΗΣ.

ΕΑΝ η Μέση Καμπυλότητα είναι παντού 0 η επιφάνεια είναι ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΕΚΤΑΣΗΣ

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ Eigenvectors, (a, b) , οι προκύψασες συντεταγμένες).

$$\text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}] \left(\begin{bmatrix} b^2 & -a \cdot b & a^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{bmatrix} \right) = 0 :$$

ΚΥΡΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

$$\triangleright a \cdot \vec{r}_u + b \cdot \vec{r}_v$$

$$a \cdot \text{diff}(\vec{r}, u) + b \cdot \text{diff}(\vec{r}, v)$$

Βάν : $k_1 > k_2$

Τότε : οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες u, v της Επιφάνειας είναι Κύριας Καμπυλότητας Καμπύλες **αν και μόνον αν :**
 $F=0, M=0$

, **Καμπυλότητα Gauss .**

$$> K := \text{simplify} \left(\text{subs} \left(\{u=a, v=b\}, \frac{L \cdot N - M^2}{E \cdot G - F^2} \right) \right)$$

$$K := -0.004956226612 \quad (58)$$

Επαλήθευση

$$> Sp := \text{simplify} \left(\text{subs} \left(\{u=a, v=b\}, \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \right) \right)$$

$$Sp := \begin{bmatrix} 0.07040047310 & 0 \\ 0 & -0.07040047310 \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$> \text{LinearAlgebra}[\text{Determinant}](Sp)$$

$$-0.004956226613 \quad (60)$$

4 . Μέση Καμπυλότητα

$$\begin{aligned} &> H := \text{simplify}\left(\text{subs}\left(\{u=a, v=b\}, \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)}\right)\right) \\ &H := 0 \end{aligned} \quad (61)$$

Επαλήθευση

$$\begin{aligned} &> \text{LinearAlgebra}[\text{Trace}]\left(\frac{Sp}{2}\right) \\ &0. \end{aligned} \quad (62)$$

5. Κύριες Καμπυλότητες

$$\begin{aligned} &> k[\text{max}] := \text{simplify}\left(\text{subs}\left(\{u=a, v=b\}, \left(H + \sqrt{H^2 - K}\right)\right)\right) \\ &k_{\text{max}} := 0.07040047310 \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} &> k[\text{min}] := \text{simplify}\left(\text{subs}\left(\{u=a, v=b\}, \left(H - \sqrt{H^2 - K}\right)\right)\right) \\ &k_{\text{min}} := -0.07040047310 \end{aligned} \quad (64)$$

Επαλήθευση

$$\begin{aligned} &> \text{simplify}(\text{LinearAlgebra}[\text{Eigenvalues}](Sp), \text{symbolic}) \\ &\begin{bmatrix} 0.07040047310 \\ -0.07040047310 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} &> \text{simplify}(\text{LinearAlgebra}[\text{Eigenvectors}](Sp)[2], \text{symbolic}) \\ &\begin{bmatrix} 1. & 0. \\ 0. & 1. \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (66)$$

6. Εξίσωση Δείκτριας Dupin στο σημείο P ..

Θεώρημα 1. Σελ. 218 ,ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ .

Σε κάθε σημείο P μιάς επιφάνειας S

υπάρχουν δύο αμοιβαία κάθετες διευθύνσεις ,

που κείνται στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο P ,

γιά τις οποίες η καμπυλότητα $K=1/R$ λαμβάνει την μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή της K_1 και K_2 αντίστοιχα .

Η καμπυλότητα ως προς οποιοδήποτε άλλο επίπεδο Π , το οποίο τέμνει την S και περιέχει το κάθετο σε αυτή διάνυσμα $\vec{n}$ δίδεται από την :

$$K_1[P] \cdot \cos^2(\theta) + K_2[P] \cdot \sin^2(\theta) = K[P](\theta) \quad \text{Τύπος Euler}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο Π με την διεύθυνση της μεγαλύτερης καμπυλότητας .

$$\text{Εάν : } M^2 - L \cdot N < 0$$

Το σημείο P είναι ελλειπτικό

Τότε είναι $K > 0$, οπότε $\frac{1}{R_2} > 0$ και $\frac{1}{R} > 0$ για κάθε εφαπτομενικό διάνυσμα $\bar{t}$.

$$\text{Το σημείο } Q \text{ κείται πάνω στην έλλειψη } \frac{x_1^2}{R_1} + \frac{x_2^2}{R_2} = 1$$

με κέντρο το σημείο P και ημιάξονες $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$, που ονομάζεται **δείκτρια του Dupin του ελλειπτικού σημείου P** .

$$\text{Εάν : } M^2 - L \cdot N > 0$$

Το σημείο P είναι υπερβολικό

Τότε είναι $K < 0$, οπότε $\frac{1}{R_2} < 0$. Η κάθετη καμπυλότητα $\frac{1}{R}$ για τις διάφορες τιμές της γωνίας φ παίρνει και θετικές και αρνητικές τιμές (και μηδενίζεται, λόγω συνέχειας).

$$\text{Εάν : } M^2 - L \cdot N = 0$$

Το σημείο P είναι παραβολικό

Τότε είναι $K = 0$, οπότε $\frac{1}{R_2} = 0$ και $\frac{1}{R} \geq 0$ για κάθε εφαπτομενικό διάνυσμα $\bar{t}$.

>

ΠΡΟΣΟΧΗ : Τις Συντεταγμένες των Ιδιοδιανυσμάτων τις πήραμε από τον πίνακα :

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. \\ 0. & 1. \end{bmatrix}$$

>

$$> XEVk[\max] := 1 :$$

$$> YEVk[\max] := 0 :$$

$$> XEVk[\min] := 0 :$$

$$> YEVk[\min] := 1 :$$

$$> U := \text{subs} \left(\{u=a, v=b\}, \frac{\text{diff}(r_{-}, u)}{\text{Norm}(\text{diff}(r_{-}, u))} \right)$$

$$U := -0.08442776736 \hat{i} - 0.7654784241 \hat{j} + 0.6378986867 \hat{k} \quad (67)$$

$$> \text{Norm}(U)$$

$$1.0000000000 \quad (68)$$

$$> V := \text{subs} \left(\{u=a, v=b\}, \frac{\text{diff}(r_{-}, v)}{\text{Norm}(\text{diff}(r_{-}, v))} \right)$$

$$V := -0.7654784241 \hat{i} + 0.4596622890 \hat{j} + 0.4502814259 \hat{k} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} &> \text{Norm}(V) \\ &1.0000000000 \end{aligned} \quad (70)$$

ΠΡΟΣΕΧΟΥΜΕ ΤΑ e1,e2 . Το e1 αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη Ιδιοτιμή .

$$\begin{aligned} &> e1 := XEVk[\text{max}] \cdot U + YEVk[\text{max}] \cdot V \\ &e1 := -0.08442776736 \hat{i} - 0.7654784241 \hat{j} + 0.6378986867 \hat{k} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} &> \text{Norm}(e1) \\ &1.0000000000 \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} &> e2 := XEVk[\text{min}] \cdot U + YEVk[\text{min}] \cdot V \\ &e2 := -0.7654784241 \hat{i} + 0.4596622890 \hat{j} + 0.4502814259 \hat{k} \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} &> \text{Norm}(e2) \\ &1.0000000000 \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} &> e1 \cdot e2 \\ &-1. \times 10^{-10} \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}\left(\text{subs}(u = a, M^2 - L \cdot N)\right) > 0 \\ &0 < 4. \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} &> \text{evalf}(\text{subs}(u = a, K)) < 0 \\ &-0.004956226612 < 0 \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} &> (PQ) := \sqrt{R} \\ &PQ := \sqrt{R} \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} &> \frac{R}{R[1]} \cdot \cos^2(\omega) - \frac{R}{R[2]} \cdot \sin^2(\omega) = 1 \\ &\frac{R \cos(\omega)^2}{R_1} - \frac{R \sin(\omega)^2}{R_2} = 1 \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} &> R[1] := \frac{1}{\text{abs}(k[\text{max}])} \\ &R_1 := 14.20445000 \end{aligned} \quad (80)$$

$$\begin{aligned} &> R[2] := \frac{1}{\text{abs}(k[\text{min}])} \\ &R_2 := 14.20445000 \end{aligned} \quad (81)$$

```

>
> X[Q] = (PQ) · cos(ω) :
> Y[Q] = (PQ) · sin(ω) :
>  $\frac{X[Q]^2}{(\text{sqrt}(R[1]))^2} - \frac{Y[Q]^2}{(\text{sqrt}(R[2]))^2} = 1 :$ 
>
>  $\frac{X[Q]^2}{(\text{sqrt}(R[1]))^2} - \frac{Y[Q]^2}{(\text{sqrt}(R[2]))^2} = 1 : \text{ Πρόκειται για ΥΠΕΡΒΟΛΗ}$ 
>
> Παραμετρικές εξισώσεις της ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ :
> X := sqrt(R[1]) · cosh(φ)
X := 3.768879144 cosh(φ) (82)
> Y := sqrt(R[2]) · sinh(φ)
Y := 3.768879144 sinh(φ) (83)
> rP_ := subs( {u=a, v=b}, r_ )
rP_ := 2.510333333 î - 4.092000000 ĵ + 1.45 k̂ (84)
> rD1_ := rP_ + X·e1 + Y·e2
rD1_ := î (2.510333333 - 0.3181980516 cosh(φ) - 2.884995668 sinh(φ)) + ĵ (
-4.092000000 - 2.884995668 cosh(φ) + 1.732411614 sinh(φ)) + k̂ (1.45
+ 2.404163056 cosh(φ) + 1.697056275 sinh(φ)) (85)
> XD1 := Component((85), 1)
XD1 := 2.510333333 - 0.3181980516 cosh(φ) - 2.884995668 sinh(φ) (86)
> YD1 := Component((85), 2)
YD1 := -4.092000000 - 2.884995668 cosh(φ) + 1.732411614 sinh(φ) (87)
> ZD1 := Component((85), 3)
ZD1 := 1.45 + 2.404163056 cosh(φ) + 1.697056275 sinh(φ) (88)
> rD2_ := rP_ - X·e1 - Y·e2
rD2_ := î (2.510333333 + 0.3181980516 cosh(φ) + 2.884995668 sinh(φ)) + ĵ (
-4.092000000 + 2.884995668 cosh(φ) - 1.732411614 sinh(φ)) + k̂ (1.45
- 2.404163056 cosh(φ) - 1.697056275 sinh(φ)) (89)
> XD2 := Component((89), 1)
XD2 := 2.510333333 + 0.3181980516 cosh(φ) + 2.884995668 sinh(φ) (90)
> YD2 := Component((89), 2)
YD2 := -4.092000000 + 2.884995668 cosh(φ) - 1.732411614 sinh(φ) (91)

```

```
> ZD2 := Component((89), 3)
      ZD2 := 1.45 - 2.404163056 cosh(φ) - 1.697056275 sinh(φ) (92)
```

```
> DUPIN1 := spacecurve([XD1, YD1, ZD1], φ = -0.45 .. 0.45, thickness = 3, color = red) :
```

```
> DUPIN2 := spacecurve([XD2, YD2, ZD2], φ = -0.45 .. 0.45, thickness = 3, color = red) :
```

```
> u -  $\frac{u^3}{3}$  + u·v2 = 0
      u -  $\frac{1}{3} u^3 + u v^2 = 0$  (93)
```

```
> allvalues(isolate((93), v))
      v =  $\sqrt{-1 + \frac{u^2}{3}}$ , v =  $-\sqrt{-1 + \frac{u^2}{3}}$  (94)
```

```
> v -  $\frac{v^3}{3}$  + v·u2 = 0
      v -  $\frac{1}{3} v^3 + v u^2 = 0$  (95)
```

```
> allvalues(isolate((95), u))
      u =  $\sqrt{-1 + \frac{v^2}{3}}$ , u =  $-\sqrt{-1 + \frac{v^2}{3}}$  (96)
```

```
> p1 := plot3d(S, u = - $\sqrt{2.5 \cdot 3}$  ..  $\sqrt{2.5 \cdot 3}$ , v = - $\sqrt{3}$  ..  $\sqrt{3}$ , labels = [x, y, z], title
      = "ΑΥΤΟΤΕΜΝΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΝΝΕΡΕ & ΔΕΙΚΤΡΙΑ DUPIN\nΣΑΒΒΑΣ Π.
      ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ ", titlefont = [arial, bold, 12], transparency = 0.00) :
```

```
> A := 7 :
```

```
> B := 7 :
```

```
> H := 5 :
```

```
> OO := pointplot3d([0, 0, 0], symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :
```

```
> axX := spacecurve([x, 0, 0], x = -(A + 1) .. (A + 1), linestyle = 3, thickness = 1, color = blue) :
```

```
> axY := spacecurve([0, y, 0], y = -(B + 1) .. (B + 1), linestyle = 3, thickness = 1, color = blue) :
```

```
> axZ := spacecurve([0, 0, z], z = - $\frac{H}{2}$  .. H + 2, linestyle = 3, thickness = 2, color = blue) :
```

```
> ARaxX := arrow([ (A + 1), 0, 0 ], [0.5, 0, 0], width = 0.1, head_length = 0.3, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
```

```
> ARaxY := arrow([0, (B + 1), 0], [0, 0.5, 0], width = 0.1, head_length = 0.3, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
```

```
> ARaxZ := arrow([0, 0, (H + 2)], [0, 0, 0.5], width = 0.1, head_length = 0.3, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
```

```

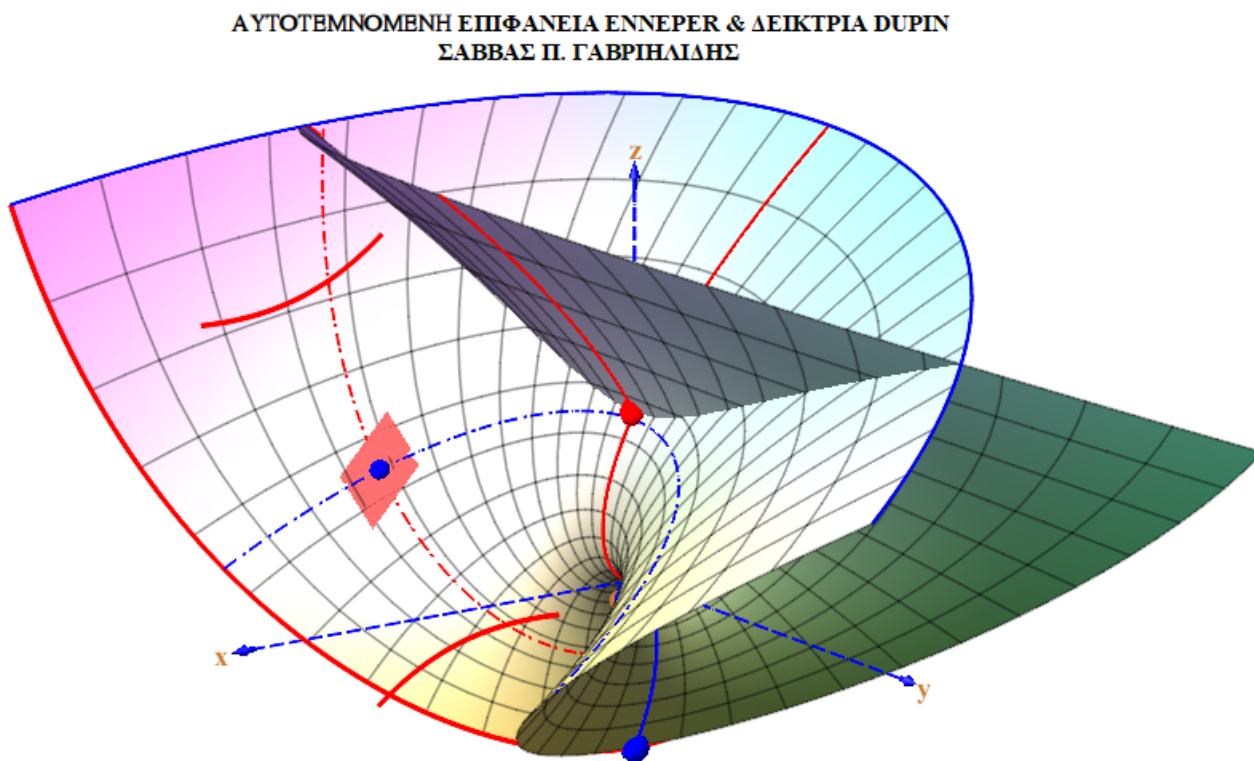
>
> tX := textplot3d([ (A + 1.7), 0.0, 0, "x"], color = gold, font = [arial, bold, 14]) :
> tY := textplot3d([ 0, (B + 1.7), 0, "y"], color = gold, font = [arial, bold, 14]) :
> tZ := textplot3d([ 0, 0, (H + 2.7), "z"], color = gold, font = [arial, bold, 14]) :
> tO := textplot3d([ 0 + 0.3, 0, -0.3, "O"], color = gold, font = [arial, bold, 14]) :
> AXONES := display(OO, axX, axY, axZ, ARaxX, ARaxY, ARaxZ, tX, tY, tZ, tO, scaling
= constrained, axes = none, orientation = [60, 65, 0], lightmodel = light4) :
>
> PU := spacecurve(subs(v = b, S), u = -√(2.5·3) .. √(2.5·3), thickness = 1, color = red, linestyle
= 4) :
> PUO := spacecurve(subs(v = 0, S), u = -√(2.5·3) .. √(2.5·3), thickness = 2, color = red, linestyle
= 1) :
> PUTERMA := spacecurve(subs(v = -√3, S), u = -√(2.5·3) .. √(2.5·3), thickness = 3, color
= red, linestyle = 1) :
> PV := spacecurve(subs(u = a, S), v = -√3 .. √3, thickness = 1, color = blue, linestyle = 4) :
> PVO := spacecurve(subs(u = 0, S), v = -√3 .. √3, thickness = 2, color = blue, linestyle = 1) :
> PVTERMA := spacecurve(subs(u = √(2.5·3), S), v = -√3 .. √3, thickness = 2, color = blue,
linestyle = 1) :
> POU := pointplot3d(subs([u = √3, v = 0], S), color = red, symbol = solidcircle, symbolsize
= 10) :
> POV := pointplot3d(subs([u = 0, v = √3], S), color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize
= 10) :
> ANIM := animate(plot3d, [n·S, u = -√(2.5·3) .. √(2.5·3), v = -√3 .. √3], n = 1.0..1.5, frames
= 50) :
> p2 := pointplot3d(P, symbol = solidcircle, symbolsize = 7, color = blue) :
> p3 := plot3d(PEFAP, x = (P[1] - 0.5) .. (P[1] + 0.5), y = (P[2] - 0.5) .. (P[2] + 0.5), style
= surface, color = red, transparency = 0.00) :
>
> animQ1 := animate(pointplot3d, [[XD1, YD1, ZD1], symbol = solidcircle, symbolsize = 4, color
= blue], φ = -0.45 .. 0.45, frames = 21, trace = 10) :
> animPQ1 := animate(spacecurve, [[P[1] + λ·(XD1 - P[1]), P[2] + λ·(YD1 - P[2]), P[3]
+ λ·(ZD1 - P[3])], λ = 0 .. 1, linestyle = 4, thickness = 1, color = blue], φ = -0.45 .. 0.45,
frames = 21, trace = 10) :
> animOQ1 := animate(spacecurve, [[0 + λ·(XD1 - 0), 0 + λ·(YD1 - 0), 0 + λ·(ZD1
- 0)], λ = 0 .. 1, linestyle = 1, thickness = 1, color = cyan], φ = -0.45 .. 0.45, frames = 21, trace
= 10) :
>
> animQ2 := animate(pointplot3d, [[XD2, YD2, ZD2], symbol = solidcircle, symbolsize = 4, color
= blue], φ = -0.45 .. 0.45, frames = 21, trace = 10) :

```

```

> animPQ2 := animate(spacecurve, [[P[1] + λ·(XD2 - P[1]), P[2] + λ·(YD2 - P[2]), P[3]
+ λ·(ZD2 - P[3])], λ=0..1, linestyle=4, thickness=1, color=blue], φ=-0.45..0.45,
frames=21, trace=10) :
> animOQ2 := animate(spacecurve, [[0 + λ·(XD2 - 0), 0 + λ·(YD2 - 0), 0 + λ·(ZD2
- 0)], λ=0..1, linestyle=1, thickness=1, color=cyan], φ=-0.45..0.45, frames=21, trace
=10) :
>
> display(AXONES, p1, p2, p3, PU, PUO, PUTERMA, PV, PVO, PVTERMA, POU, POV,
DUPIN1, DUPIN2, orientation = [55, 75, 0]) :

```

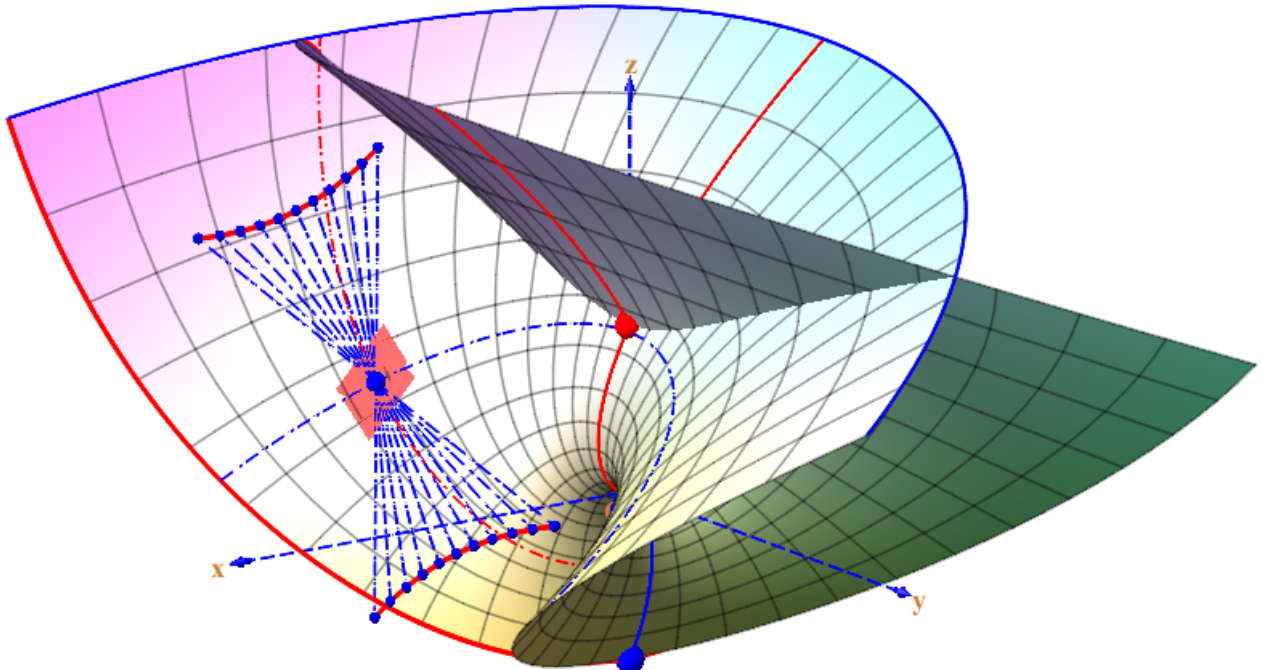


```

> display(AXONES, p1, p2, p3, PU, PUO, PUTERMA, PV, PVO, PVTERMA, POU, POV,
DUPIN1, DUPIN2, animQ1, animPQ1, animQ2, animPQ2, orientation = [55, 75, 0], title
= "ANIMATION\ nΑΥΤΟΤΕΜΝΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ENNEPER & ΔΕΙΚΤΡΙΑ
DUPIN\ nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ ", titlefont = [arial, bold, 12]) :

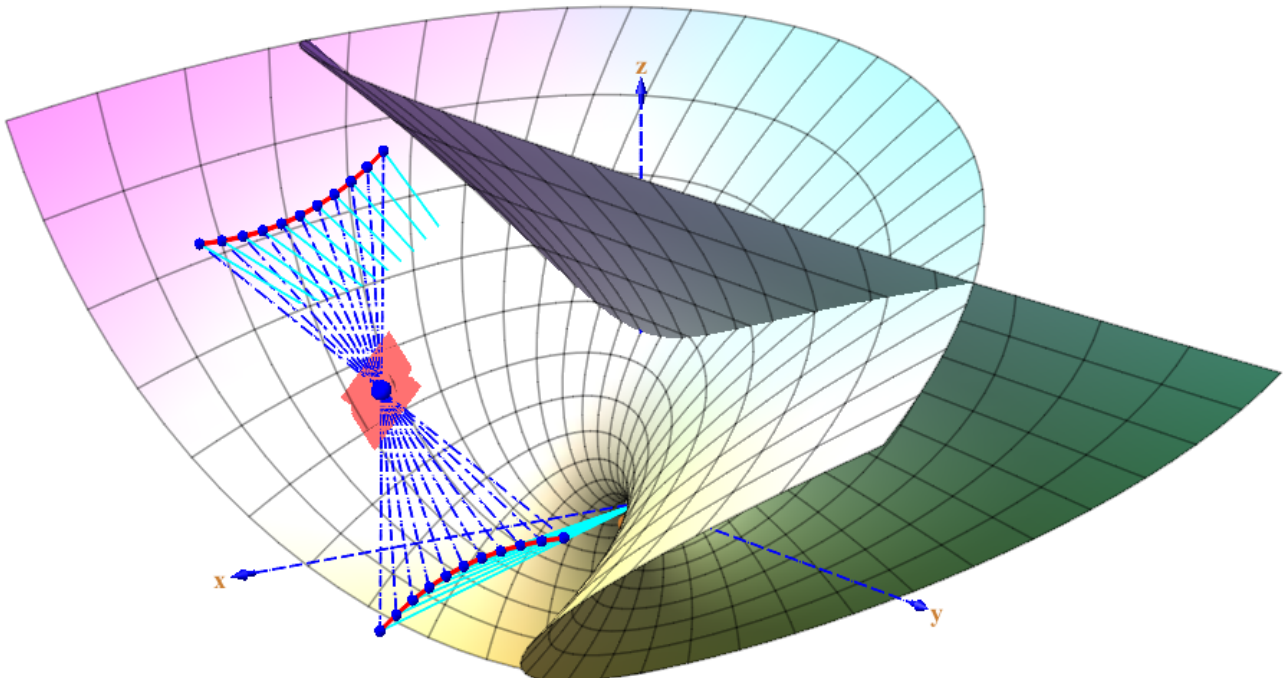
```


ANIMATION
ΑΥΤΟΤΕΜΝΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ENNEPER & ΔΕΙΚΤΡΙΑ DUPIN
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



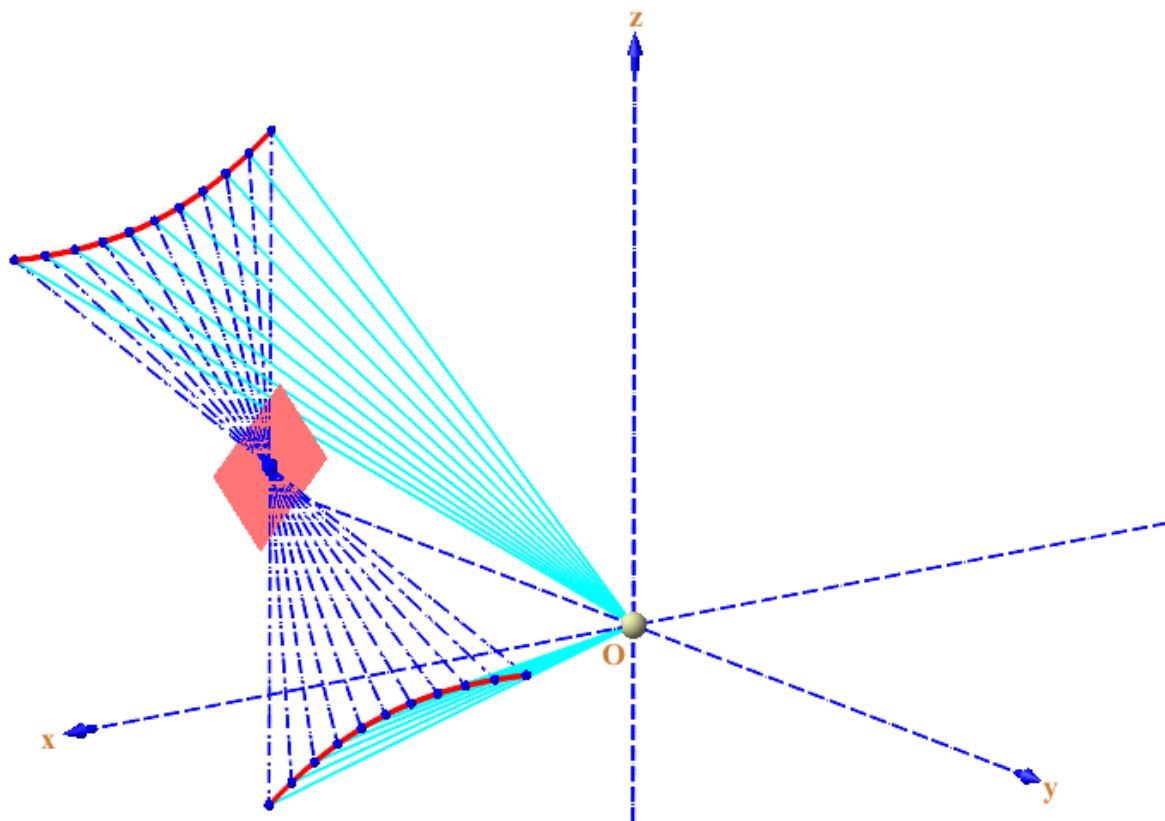
```
> display(AXONES, p1, p2, p3, DUPIN1, DUPIN2, animQ1, animPQ1, animOQ1, animQ2,
animPQ2, animOQ2, orientation = [55, 75, 0], title
="ANIMATION\nΑΥΤΟΤΕΜΝΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ENNEPER & ΔΕΙΚΤΡΙΑ
DUPIN\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ ", titlefont = [arial, bold, 12]) :
```

ANIMATION
ΑΥΤΟΤΕΜΝΟΜΕΝΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ENNEPER & ΔΕΙΚΤΡΙΑ DUPIN
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



```
> display(AXONES, p2, p3, DUPIN1, DUPIN2, animQ1, animPQ1, animOQ1, animQ2, animPQ2,
animOQ2, orientation = [55, 75, 0], title
= "ANIMATION\ nΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ENNEPER & ΔΕΙΚΤΡΙΑ DUPIN\ nΣΑΒΒΑΣ Π.
ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ ", titlefont = [arial, bold, 12]) :
```

**ANIMATION
ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ENNEPER & ΔΕΙΚΤΡΙΑ DUPIN
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ**



>