>

> $with(plots):$

> $with(Physics[Vectors]):$

> $Setup(mathematicalnotation = true):$

>

Κάθε κάθετη τομή μιας επιφάνειας είναι ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ καμπύλη .
Κάθε ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΥΚΛΟΣ μιας ΣΦΑΙΡΑΣ είναι ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ καμπύλη .

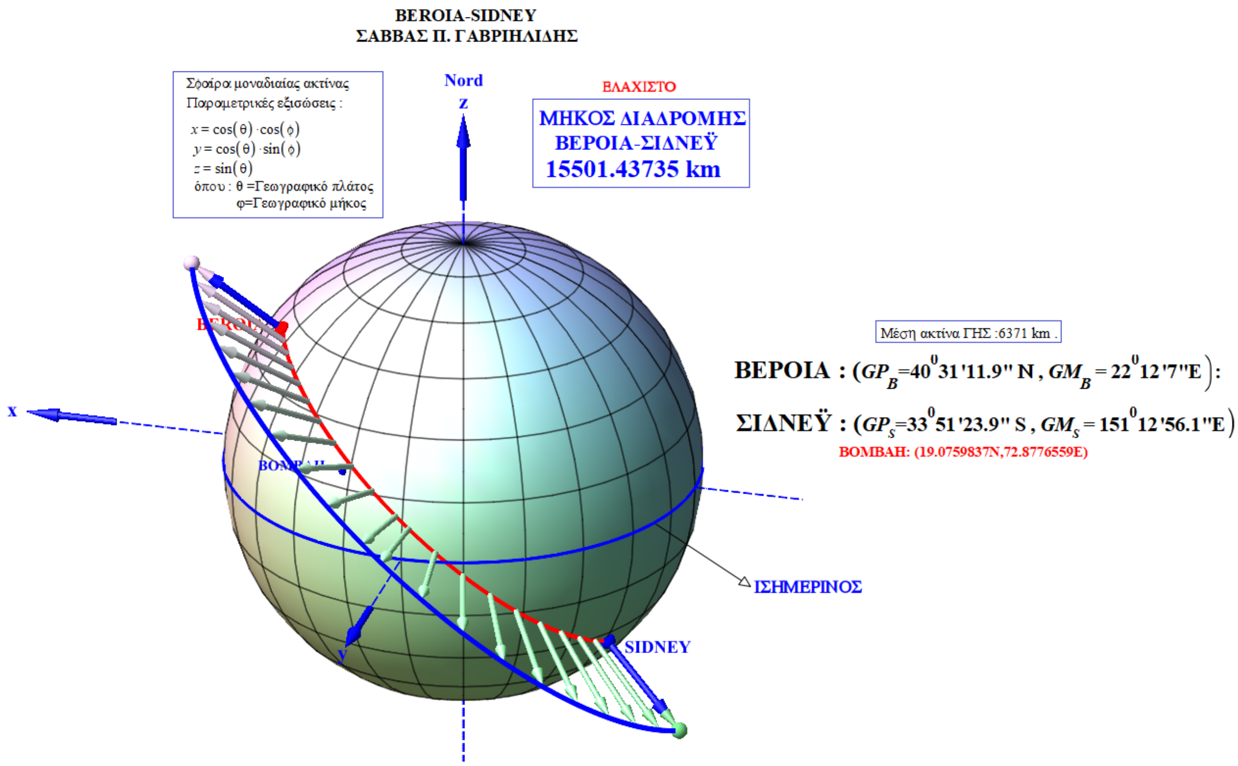
Θέμα :

Στην επιφάνεια Σφαίρας , με κέντρο (0,0,0) και ακτίνα r έχουμε δύο σημεία Α ,Β , με συντεταγμένες :
$A(\theta_A, \phi_A), B(\theta_B, \phi_B)$.

Να βρούμε τις Εξισώσεις της Γραμμής Ελάχιστου μήκους **(ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ)** που συνδέει τα δύο σημεία , να υπολογίσουμε το μήκος της και να την χαράξουμε .

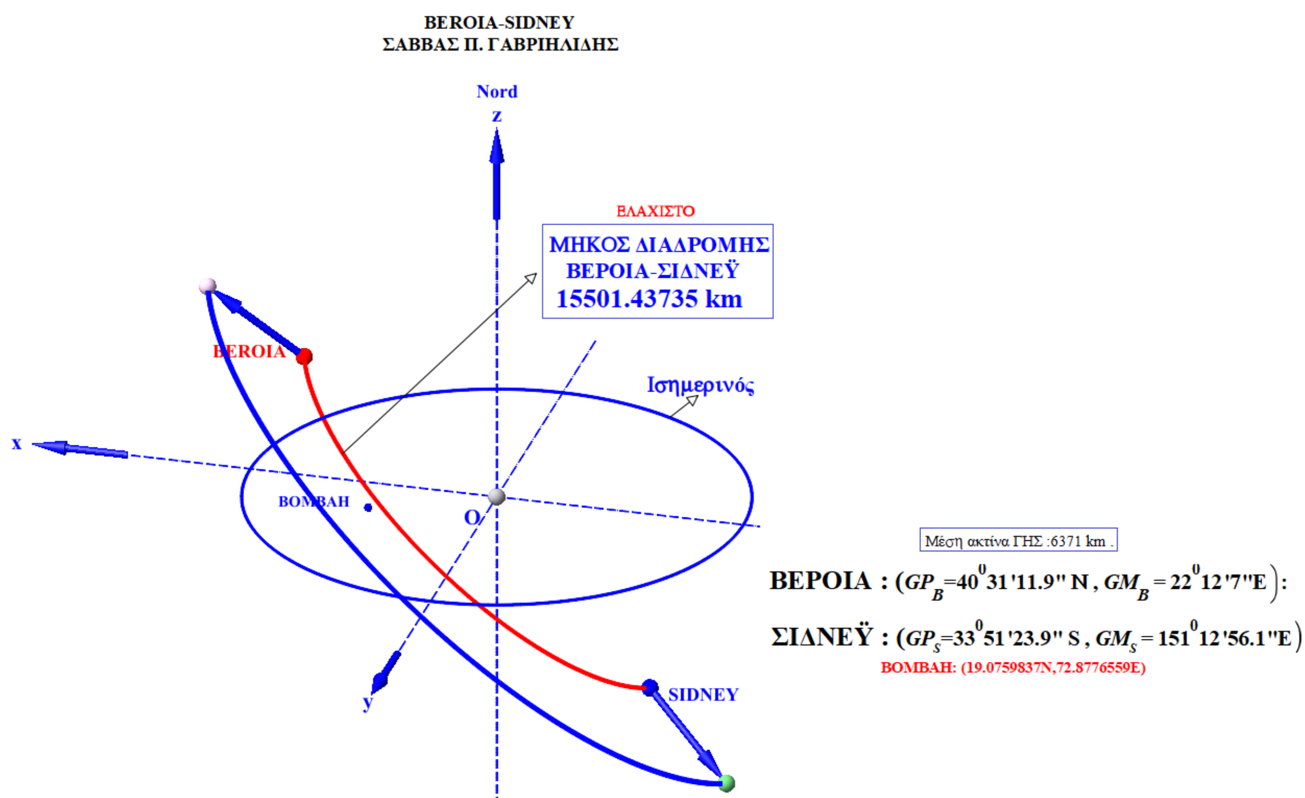
Παράδειγμα : Α (ΒΕΡΟΙΑ), Β (ΣΙΔΝΕΫ) .

Sydney Opera House (Σίδνεϊ, Αυστραλία)



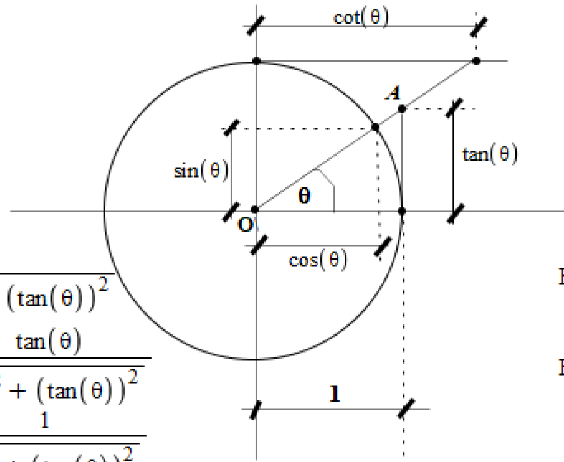
Η Σχέση ανάμεσα σε θ, φ γιά να είναι ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ (Γραμμή Ελάχιστου Μήκους) , η διαδρομή (ΑΒ) επί της Επιφανείας της Σφαίρας .

$$\theta = \tan^{-1}\left(a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi)\right)$$



>

Τριγωνομετρικός Κύκλος



$$(OA)=\sqrt{1^2+(\tan(\theta))^2}$$

$$\sin(\theta)=\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1^2+(\tan(\theta))^2}}$$

$$\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{1^2+(\tan(\theta))^2}}$$

Σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας
Παραμετρικές εξισώσεις :

$$x=\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)$$
$$y=\cos(\theta)\cdot\sin(\phi)$$
$$z=\sin(\theta)$$

όπου : θ =Γεωγραφικό πλάτος
φ=Γεωγραφικό μήκος

Επίπεδο διερχόμενο από το κέντρο της Σφαίρας

$$z=a\cdot x+b\cdot y$$

Η Τομή Σφαίρας- Επιπέδου επαληθεύει την σχέση

$$\sin(\theta)=a\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)+b\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi)\Rightarrow$$
$$\tan(\theta)=a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi)\Rightarrow$$
$$\theta=\tan^{-1}(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))$$

Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης **(Μέγιστος κύκλος)** τομής Σφαίρας με Επίπεδο $z=a\cdot x+b\cdot y$ διερχόμενο από το κέντρο της Σφαίρας

$$x=\frac{1}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\cos(\phi)$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\sin(\phi)$$

$$z=\frac{a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi)}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ :
GP : Γεωγραφικό Πλάτος
GM: Γεωγραφικό μήκος
B: ΒΕΡΟΙΑ
GR: ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ
M: ΜΟΣΧΑ
S: ΣΙΔΝΕΫ
LS: ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ
KT: ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ

ΚΛΙΣΗ ΑΞΟΝΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ της ΓΗΣ ως προς την κατακόρυφο : 23, 439247 ° = 0.40909 *rad*.
Μέση ακτίνα ΓΗΣ :6371 km .
Αφήλιο :152.098.232 km , Περιήλιο :147.098.290 km , Εκκεντρότητα :0.01671123 .
Μεγάλος Ημιάξονας Ελλειπτικής : α=149.598.261 km **(5)**,⇒c=2.499.971 km **(1)**
Μικρός Ημιάξονας Ελλειπτικής :b=149.577.371 km **(4)**.

ΒΕΡΟΙΑ : $(GP_B=40^0 31'11.9''\,N,\ GM_B=22^0 12'7''E)$: $40+\frac{31}{60}+\frac{11.9}{3600}=40.51997223$ $\quad evalf\left(22+\frac{12}{60}+\frac{7}{3600}\right)=22.20194444$

ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ : $(GP_{GR}=51^0 28'59.3''\,N,\ GM_{GR}=0)$: $51+\frac{28}{60}+\frac{59.3}{3600}=51.48313889$ $\quad 0=0$

ΜΟΣΧΑ : $(GP_M=55^0 45'14''\,N,\ GM_M=37^0 37'13.1''E)$ $evalf\left(55+\frac{45}{60}+\frac{14}{3600}\right)=55.75388889$ $\quad 37+\frac{37}{60}+\frac{13.1}{3600}=37.62030556$

ΣΙΔΝΕΫ : $(GP_S=33^0 51'23.9''\,S,\ GM_S=151^0 12'56.1''E)$: $-33-\frac{51}{60}-\frac{23.9}{3600}=-33.85663889$ $\quad 151+\frac{12}{60}+\frac{56.1}{3600}=151.2155833$

ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ : $(GP_{LS}=34^0 06'48.0''\,N,\ GM_{LS}=118^0 19'46.9''W)$: $evalf\left(34+\frac{06}{60}+\frac{48}{3600}\right)=34.11333333$ $\quad -\left(118+\frac{19}{60}+\frac{46.9}{3600}\right)=-118.3296945$

ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ : $(GP_{KT}=33^0 54'16.6''\,S,\ GM_{KT}=18^0 24'36.6''E)$: $evalf\left(-\left(33+\frac{6}{60}+\frac{48}{3600}\right)\right)=-33.11333333$ $\quad 18+\frac{24}{60}+\frac{36.6}{3600}=18.41016667$

ΒΟΜΒΑΗ: (19.0759837N,72.8776559E)

\>

\> $R := 1$

$$R := 1 \qquad (1)$$

\> $r\_ := R\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot\_i+R\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot\_j+R\cdot\sin(\theta)\cdot\_k$

$$\vec{r} := \cos(\theta)\cos(\phi)\,\hat{i}+\cos(\theta)\sin(\phi)\,\hat{j}+\sin(\theta)\,\hat{k} \qquad (2)$$

\> $Hrb := [Component(r\_,1), Component(r\_,2), Component(r\_,3)]$

$$Hrb := [\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta)] \qquad (3)$$

\>

Εξίσωση Επιπέδου που περνάει από τα A,B και το Κέντρο της Σφαίρας .

>

Έστωσαν οι Γεωγραφικές Συντεταγμένες των A(Βέροια) , B(Σίδνεϋ) , C(BOMBAH):

> $\theta A := \frac{40.51997223}{180} \cdot \mathrm{Pi}$:

> $\phi A := \frac{22.201944444}{180} \mathrm{Pi}$:

> $\theta B := -\frac{33.85663889}{180} \cdot \mathrm{Pi}$:

> $\phi B := \frac{151.2155833}{180} \cdot \mathrm{Pi}$:

>

> $A := evalf\left(subs\left(\left\{\theta = \theta A, \phi = \phi A\right\}, Hrb\right)\right)$

$$A := [0.7038181218, 0.2872507189, 0.6497130720] \tag{4}$$

> $B := evalf\left(subs\left(\left\{\theta = \theta B, \phi = \phi B\right\}, Hrb\right)\right)$

$$B := [-0.7278237717, 0.3998667620, -0.5571168010] \tag{5}$$

> $C := evalf\left(subs\left(\left\{\theta = \frac{19.0759837}{180} \cdot \mathrm{Pi}, \phi = \frac{72.8776559}{180} \cdot \mathrm{Pi}\right\}, Hrb\right)\right)$

$$C := [0.2782456393, 0.9031981439, 0.3268217821] \tag{6}$$

>

> $rA\_ := A[1] \cdot \_i + A[2] \cdot \_j + A[3] \cdot \_k$

$$\overrightarrow{rA} := 0.7038181218\, \hat{i} + 0.2872507189\, \hat{j} + 0.6497130720\, \hat{k} \tag{7}$$

> $rB\_ := B[1] \cdot \_i + B[2] \cdot \_j + B[3] \cdot \_k$

$$\overrightarrow{rB} := -0.7278237717\, \hat{i} + 0.3998667620\, \hat{j} - 0.5571168010\, \hat{k} \tag{8}$$

> $EEPIPED := evalf\left((rA\_ \times rB\_).(x \cdot \_i + y \cdot \_j + z \cdot \_k) = 0\right)$

$$EEPIPED := -0.4198308639\, x - 0.0807677181\, y + 0.4905013751\, z = 0. \tag{9}$$

> $isolate(\mathbf{(9)}, z)$

$$z = 0.8559218897\, x + 0.1646635916\, y \tag{10}$$

> $EPIPEDO := lhs(\mathbf{(10)}) - rhs(\mathbf{(10)})$

$$EPIPEDO := z - 0.8559218897\, x - 0.1646635916\, y \tag{11}$$

>

> $a := coeff(rhs(\mathbf{(10)}), x)$

$$a := 0.8559218897 \tag{12}$$

> $b := coeff(rhs(\mathbf{(10)}), y)$

(13)

$$b := 0.1646635916 \quad (13)$$

>

Παραμετρικές Εξισώσεις Μέγιστου κύκλου της ΓΗΣ που περνάει από τα σημεία A,B .

>

>

$$> X := R\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\cos(\phi)$$

$$X := \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1+(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi))^2}} \quad (14)$$

$$> Y := R\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\sin(\phi)$$

$$Y := \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1+(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi))^2}} \quad (15)$$

$$> Z := R\cdot\frac{(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}$$

$$Z := \frac{0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)}{\sqrt{1+(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi))^2}} \quad (16)$$

$$> TEST := evalf(subs(\phi=\phi A, [X, Y, Z]))$$

$$TEST := [0.7038181220, 0.2872507190, 0.6497130720] \quad (17)$$

$$> \boldsymbol{A} := evalf(subs(\{\theta=\theta A, \phi=\phi A\}, Hrb))$$

$$A := [0.7038181218, 0.2872507189, 0.6497130720] \quad (18)$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

Με βάση τις γωνίες των διανυσμάτων που τα ορίζουν .

Η Καμπύλη $[X, Y, Z]$ είναι ΚΥΚΛΟΣ ακτίνας R :
$R = simplify(\mathrm{sqrt}(X^2+Y^2+Z^2)) = 1$

$$> ANGLE := \cos^{-1}\left(\frac{(rA\_.rB\_)}{Norm(rA\_)\cdot Norm(rB\_)}\right)$$

$$ANGLE := 2.433124682 \quad (19)$$

$$> ABMHKOS := subs(R1 = 6371\,\mathrm{km}, R1\cdot ANGLE)$$

$$ABMHKOS := 15501.43735\ \mathrm{km} \quad (20)$$

$$> EPALHUEYSH := evalf\left(subs\left(R1=6371, \left(int\left(R1\cdot\mathrm{sqrt}\left((diff(X,\phi))^2+(diff(Y,\phi))^2+(diff(Z,\phi))^2\right), \phi=\phi A..\phi B, numeric\right)\right)\right)\right)$$

$$EPALHUEYSH := 15501.43735 \quad (21)$$

ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ-ΤΟΜΗΣ $\overrightarrow{Nc}$ στα σημεία Α , Β :

ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ $\overrightarrow{Ns}$ στα σημεία Α , Β :

ΕΙΝΑΙ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ .!!!

> $diff(r\_, \phi) \times diff(r\_, \theta)$

$$\cos(\theta)^2 \cos(\phi)\ \hat{i} + \cos(\theta)^2 \sin(\phi)\ \hat{j} + \hat{k} \sin(\theta) \cos(\theta) \qquad \textbf{(22)}$$

> $simplify(\ Norm(diff(r\_, \phi) \times diff(r\_, \theta)))$ assuming $0 \leq \theta \leq \mathrm{Pi}$

$$|\cos(\theta)| \qquad \textbf{(23)}$$

> $\dfrac{\textbf{(22)}}{\textbf{(23)}}$

$$\frac{\cos(\theta)^2 \cos(\phi)\ \hat{i} + \cos(\theta)^2 \sin(\phi)\ \hat{j} + \hat{k} \sin(\theta) \cos(\theta)}{|\cos(\theta)|} \qquad \textbf{(24)}$$

> $GEODESIC := subs(\theta = \tan^{-1}(a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi)),\ \textbf{(24)})$

$$GEODESIC := \Big(\cos(\arctan(0.8559218897 \cos(\phi) + 0.1646635916 \sin(\phi)))^2 \cos(\phi)\ \hat{i} + \cos(\arctan(0.8559218897 \cos(\phi) + 0.1646635916 \sin(\phi)))^2 \sin(\phi)\ \hat{j} + \hat{k} \sin(\arctan(0.8559218897 \cos(\phi) + 0.1646635916 \sin(\phi))) \cos(\arctan(0.8559218897 \cos(\phi) + 0.1646635916 \sin(\phi)))\Big) \Big/ |\cos(\arctan(0.8559218897 \cos(\phi) + 0.1646635916 \sin(\phi)))| \qquad \textbf{(25)}$$

>

> $KATHETOSA := evalf(subs([\phi = \phi A, \theta = \theta A], \textbf{(24)}))$

$$KATHETOSA := 0.7038181216\ \hat{i} + 0.2872507189\ \hat{j} + 0.6497130719\ \hat{k} \qquad \textbf{(26)}$$

> $Norm(\textbf{(26)})$

$$0.9999999998 \qquad \textbf{(27)}$$

> $KATHETOSB := evalf(subs([\phi = \phi B, \theta = \theta B], \textbf{(24)}))$

$$KATHETOSB := -0.7278237720\ \hat{i} + 0.3998667621\ \hat{j} - 0.5571168012\ \hat{k} \qquad \textbf{(28)}$$

> $Norm(\textbf{(28)})$

$$1.000000000 \qquad \textbf{(29)}$$

> $AA := 1 :$

> $BB := 1 :$

> $H := 1 :$

> $OO := pointplot3d([0, 0, 0], symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :$

>

> $axX := spacecurve([x, 0, 0], x = -(AA + 0.5)..(AA + 0.5), linestyle = 3, thickness = 1, color = blue) :$

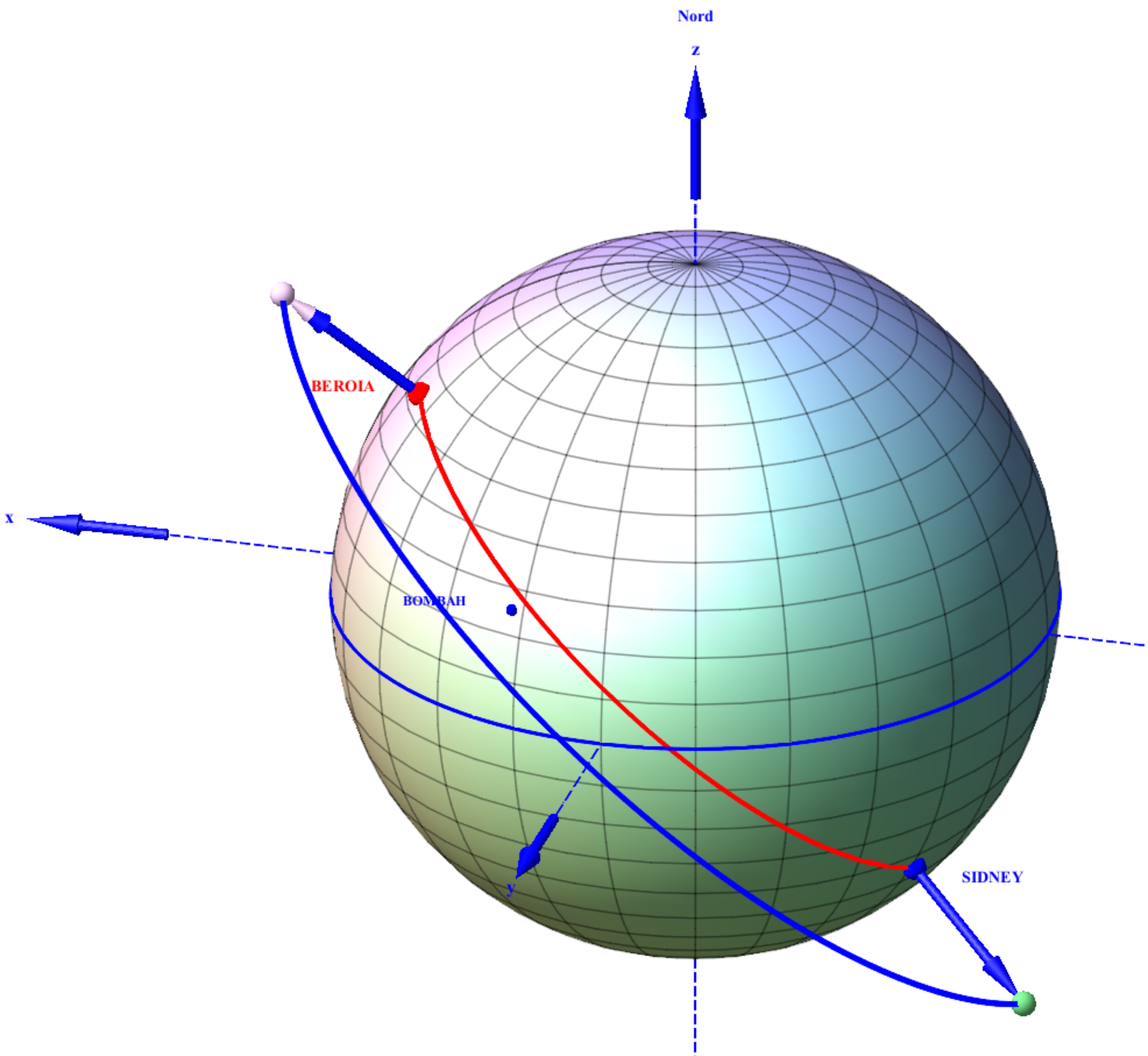
> $axY := spacecurve([0, y, 0], y = -(BB + 0.5)..(BB + 0.5), linestyle = 3, thickness = 1, color = blue) :$

> $axZ := spacecurve([0, 0, z], z = -H - 0.5..H + 0.2, linestyle = 3, thickness = 2, color = blue) :$

```
>
> ARaxX := arrow([(AA + 0.5), 0, 0], [0.4, 0, 0], width = 0.03, head_length = 0.15, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
> ARaxY := arrow([0, (BB + 0.5), 0], [0, 0.4, 0], width = 0.03, head_length = 0.15, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
> ARaxZ := arrow([0, 0, (H + 0.2)], [0, 0, 0.4], width = 0.03, head_length = 0.15, shape
      = cylindrical_arrow, color = blue) :
>
> tX := textplot3d([(AA + 0.95), 0, 0, "x"], color = blue, font = [arial, bold, 16]) :
> tY := textplot3d([0, (BB + 0.95), 0, "y"], color = blue, font = [arial, bold, 16]) :
> tZ := textplot3d([0, 0, (H + 0.65), "z"], color = blue, font = [arial, bold, 16]) :
> tO := textplot3d([0 + 0.1, 0, -0.1, "O"], color = blue, font = [arial, bold, 16]) :
> AXONES := display(OO, axX, axY, axZ, ARaxX, ARaxY, ARaxZ, tX, tY, tZ, tO, scaling
      = constrained, axes = none, orientation = [60, 65, 0], lightmodel = light4) :
>
> GH := plot3d(Hrb, θ = -Pi/2 .. Pi/2, φ = 0 .. 2·Pi) :
> GH1 := plot3d(Hrb, θ = -Pi/2 .. Pi/2, φ = φA .. φB) :
> GH2 := plot3d(Hrb, θ = -Pi/2 .. Pi/2, φ = φB .. 2·Pi + φA) :
> BORRAS := textplot3d([0, 0, H + 0.75, "Nord"], color = blue, font = [arial, bold, 14]) :
> BEROIA := pointplot3d(A, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = red) :
> SIDNEY := pointplot3d(B, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = blue) :
> BOMBAH := pointplot3d(C, symbol = solidcircle, symbolsize = 5, color = blue) :
>
> BER := textplot3d([A[1] + 0.22, A[2], A[3], "BEROIA"], color = red, font = [arial, bold,
      14]) :
> SID := textplot3d([ B[1] - 0.22, B[2], B[3], "SIDNEY"], color = blue, font = [arial, bold,
      14]) :
> BOM := textplot3d([ C[1] + 0.22, C[2], C[3], "BOMBAH"], color = blue, font = [arial, bold,
      12]) :
> DIADROMH := spacecurve([X, Y, Z], φ = φA .. φB, color = red, thickness = 4, linestyle = 1) :
> EQUATEUR := spacecurve([subs(θ = 0, Hrb)], φ = 0 .. 2·Pi, color = blue, thickness = 3, linestyle
      = 1) :
>
> AVERTICAL := arrow([A[1], A[2], A[3]], 0.5·[Component(KATHETOSA, 1),
      Component(KATHETOSA, 2), Component(KATHETOSA, 3)], width = 0.03, head_length
      = 0.15, shape = cylindrical_arrow, color = blue) :
> BVERTICAL := arrow([B[1], B[2], B[3]], 0.5·[Component(KATHETOSB, 1),
      Component(KATHETOSB, 2), Component(KATHETOSB, 3)], width = 0.03, head_length
      = 0.15, shape = cylindrical_arrow, color = blue) :
>
```

```
> animAVERTICAL := animate(arrow, [[X, Y, Z], 0.5·[Component(GEODESIC, 1),
      Component(GEODESIC, 2), Component(GEODESIC, 3)]], φ = φA ..φB, frames = 40, trace
      = 20) :
>
> AAA := spacecurve([X + 0.5· Component(GEODESIC, 1), Y + 0.5· Component(GEODESIC,
      2), Z + 0.5· Component(GEODESIC, 3)], φ = φA ..φB, color = blue, thickness = 5) :
> A1 := pointplot3d(subs(φ = φA, [X + 0.5· Component(GEODESIC, 1), Y + 0.5
      · Component(GEODESIC, 2), Z + 0.5· Component(GEODESIC, 3)]), symbol
      = solidcircle, symbolsize = 10) :
> B1 := pointplot3d(subs(φ = φB, [X + 0.5· Component(GEODESIC, 1), Y + 0.5
      · Component(GEODESIC, 2), Z + 0.5· Component(GEODESIC, 3)]), symbol
      = solidcircle, symbolsize = 10) :
>
> PTHSH := animate(pointplot3d, [[X + 0.5· Component(GEODESIC, 1), Y + 0.5
      · Component(GEODESIC, 2), Z + 0.5· Component(GEODESIC, 3)], color = red, symbol
      = solidcircle, symbolsize = 5], φ = φA ..φB, frames = 40, trace = 20) :
>
> display(AXONES, GH, BORRAS, BEROIA, SIDNEY, BOMBAH, BER, SID, BOM, DIADROMH,
      EQUATEUR, AVERTICAL, BVERTICAL, animAVERTICAL, AAA, A1, B1, PTHSH, axes
      = none, orientation = [105, 65, 0], title
      = "BEROIA-SIDNEY\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 14])
```

BEROIA-SIDNEY
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



>
>