

```

> with(plots)
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d,
conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d,
densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d,
implicitplot, implicitplot3d, inequal, interactive, interactiveparams, intersectplot,
listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot,
matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot, pointplot3d, polarplot,
polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, rootlocus,
semilogplot, setcolors, setoptions, setoptions3d, shadebetween, spacecurve,
sparsematrixplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot] (1)

> with(Physics[Vectors])
[&x, `+`, ``, ChangeBasis, ChangeCoordinates, Component, Curl, DirectionalDiff,
Divergence, Gradient, Identify, Laplacian,  $\nabla$ , Norm, Setup, diff] (2)

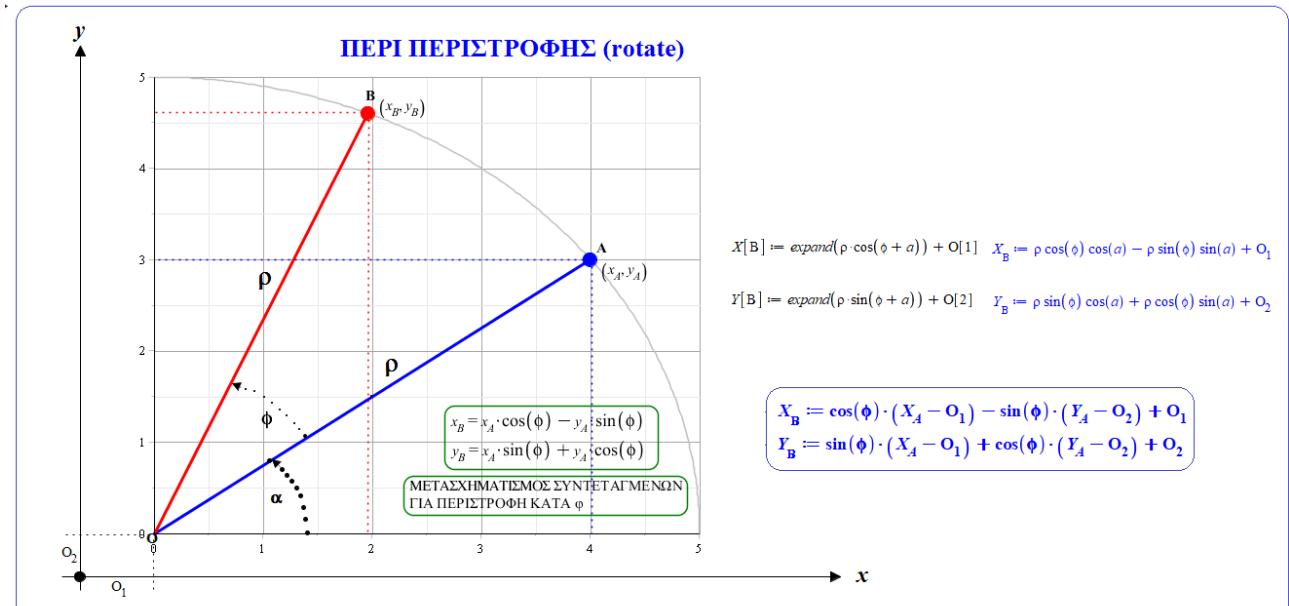
> Setup(mathematicalnotation = true)
[mathematicalnotation = true] (3)

> with(plottools)
[annulus, arc, arrow, circle, cone, cuboid, curve, cutin, cutout, cylinder, disk, dodecahedron,
ellipse, ellipticArc, exportplot, extrude, getdata, hemisphere, hexahedron, homothety,
hyperbola, icosahedron, importplot, line, octahedron, parallelepiped, pieslice, point,
polygon, prism, project, rectangle, reflect, rotate, scale, sector, semitorus, sphere,
stellate, tetrahedron, torus, transform, translate] (4)

> with(RealDomain)
[ $\Im$ ,  $\Re$ , `^`, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh,
arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech,
signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh] (5)

```

>



>

# ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΟΠΟΙΑΣΔΗΠΟΤΕ ΚΑΜΠΥΛΗΣ 2D ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΤΥΧΟΝ

## ΣΗΜΕΙΟ ΑΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

>  $A := [1.50, -2.00]$

$$A := [1.50, -2.00]$$

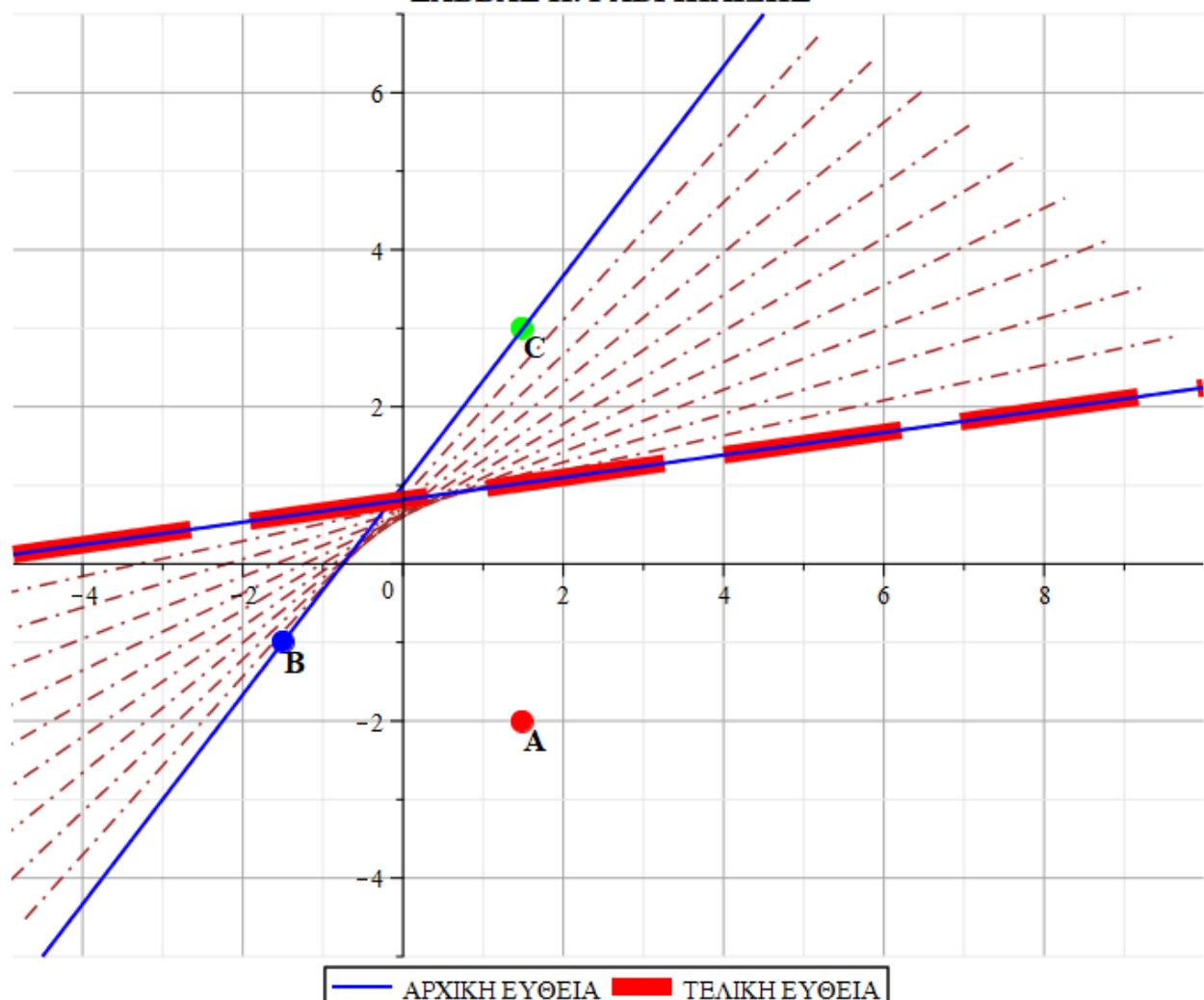
(6)

1. ΕΥΘΕΙΑ διερχομένη από τα σημεία  $B, C$  : (ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΟΥΜΕ) .

>

>

Ευθεία (BC) περιστρεφόμενη περί το σημείο A  
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



>

>

>  $B := [-1.5, -1.0]$

(7)

$$B := [-1.5, -1.0] \quad (7)$$

$$> C := [1.5, 3.0] \quad C := [1.5, 3.0] \quad (8)$$

$$> rA_{\_} := A[1] \cdot \_i + A[2] \cdot \_j \quad \vec{rA} := 1.50 \hat{i} - 2.00 \hat{j} \quad (9)$$

$$> rB_{\_} := B[1] \cdot \_i + B[2] \cdot \_j \quad \vec{rB} := -1.5 \hat{i} - 1.0 \hat{j} \quad (10)$$

$$> rC_{\_} := C[1] \cdot \_i + C[2] \cdot \_j \quad \vec{rC} := 1.5 \hat{i} + 3.0 \hat{j} \quad (11)$$

$$> R_{\_} := rB_{\_} + t \cdot (rC_{\_} - rB_{\_}) \quad \vec{R} := \hat{i} (-1.5 + 3.0 t) + \hat{j} (-1.0 + 4.0 t) \quad (12)$$

$$> X := Component(R_{\_}, 1) \quad X := -1.5 + 3.0 t \quad (13)$$

$$> Y := Component(R_{\_}, 2) \quad Y := -1.0 + 4.0 t \quad (14)$$

>

**Με την περιστροφή περί το σημείο **A** κατά γωνία **ϕ** από την Αρχική θέση της ευθείας οι συντεταγμένες **X,Y**, γίνονται **X1,Y1**.**

$$\boxed{\begin{aligned} X_B &:= \cos(\phi) \cdot (X_A - O_1) - \sin(\phi) \cdot (Y_A - O_2) + O_1 \\ Y_B &:= \sin(\phi) \cdot (X_A - O_1) + \cos(\phi) \cdot (Y_A - O_2) + O_2 \end{aligned}}$$

$$> X1 := \cos(\phi) \cdot (X - A[1]) - \sin(\phi) \cdot (Y - A[2]) + A[1] \quad X1 := \cos(\phi) (-3.00 + 3.0 t) - \sin(\phi) (1.00 + 4.0 t) + 1.50 \quad (15)$$

$$> Y1 := \sin(\phi) \cdot (X - A[1]) + \cos(\phi) \cdot (Y - A[2]) + A[2] \quad Y1 := \sin(\phi) (-3.00 + 3.0 t) + \cos(\phi) (1.00 + 4.0 t) - 2.00 \quad (16)$$

>

**Μετά την περιστροφή η ΕΥΘΕΙΑ έχει παραμετρικές εξισώσεις :**

>

$$> evalf\left(subs\left(\phi = -\frac{\pi}{4}, X1\right)\right) \quad 0.085786438 + 4.949747468 t \quad (17)$$

$$> evalf\left(subs\left(\phi = -\frac{\pi}{4}, Y1\right)\right) \quad 0.828427125 + 0.707106780 t \quad (18)$$

>

$$> Ppoints := pointplot([A, B, C], symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=[red, blue, green]):$$

$$> TEXTPOINT := textplot([[A[1] + 0.15, A[2] - 0.25, "A"], [B[1] + 0.15, B[2] - 0.25, "B"], [C[1] + 0.15, C[2] - 0.25, "C"]], font=[arial, bold, 14]):$$

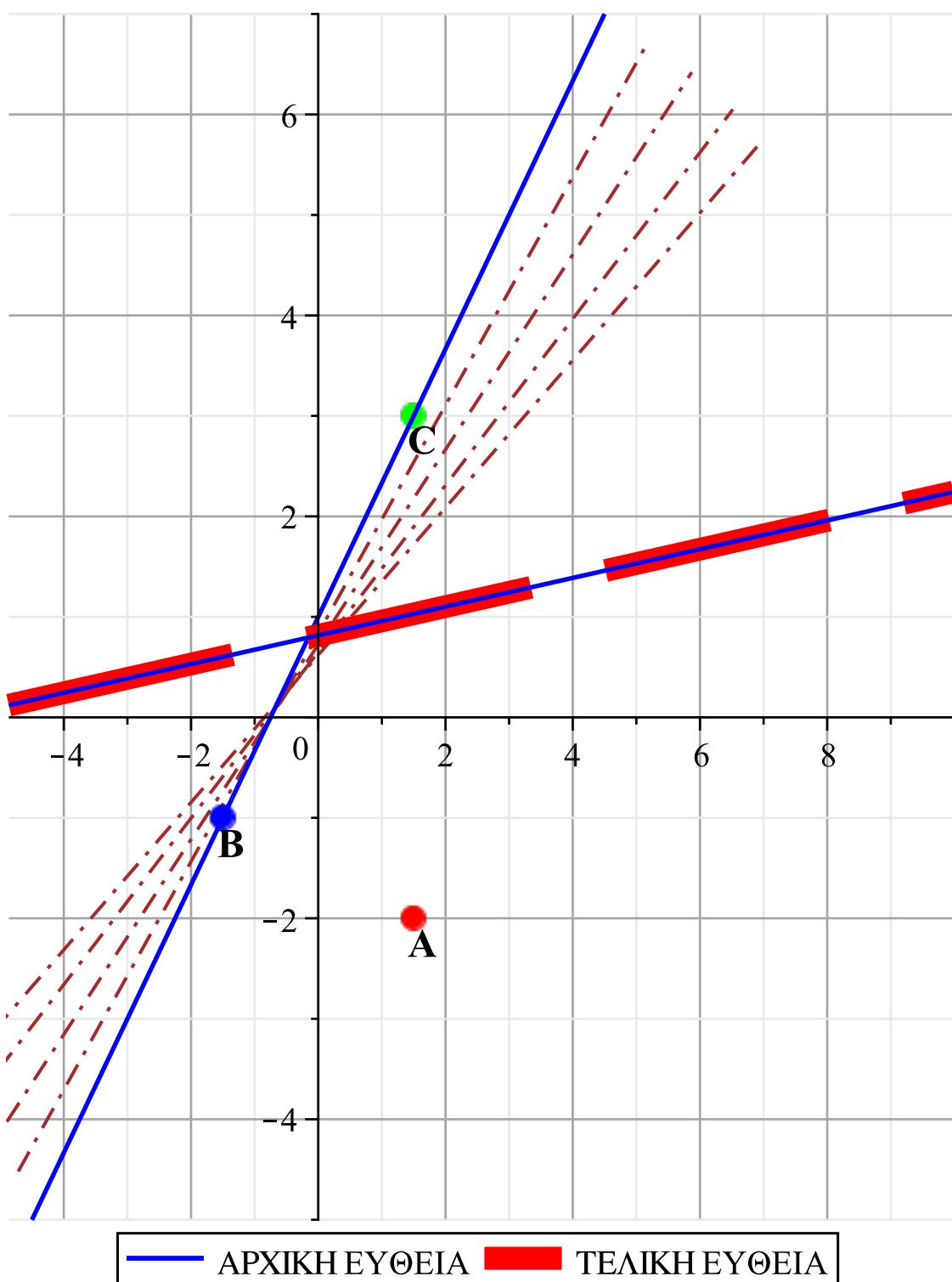
$$> ARXIKHline := plot([X, Y, t=-1..2], color=blue, thickness=2, legend$$

```

        = "APXIKH EYΘEIA") :
> TELIKHline := plot( [(17), (18), t=-1 ..2], color=red, thickness=10, linestyle=3, legend
        = "ΤΕΛΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ") :
> ANIMline := animate( plot, [ [X1, Y1, t=-1 ..2], color=brown, thickness=1, linestyle=4 ], φ
        = 0 .. -  $\frac{\text{Pi}}{4}$ , frames=41, trace=10 ) :
> RR := rotate( ARline, -  $\frac{\text{Pi}}{4}$ , A ) :
> display(Ppoints, TEXTPOINT, ARXIKHline, TELIKHline, ANIMline, RR, title
        = "Ευθεία (BC) περιστρεφόμενη περί το σημείο A\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ",
        titlefont=[arial, bold, 14], gridlines)

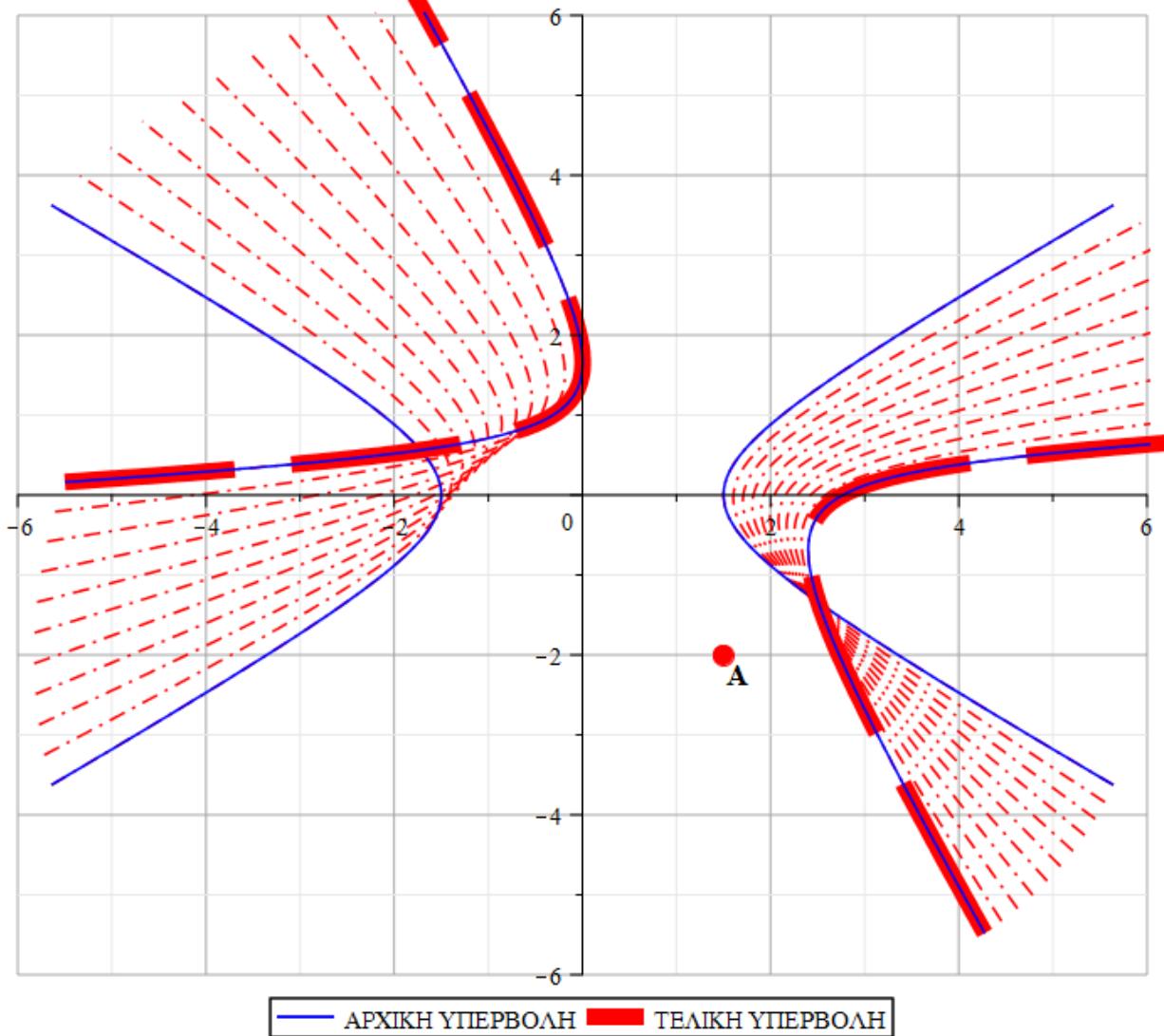
```

**Ευθεία (BC) περιστρεφόμενη περί το σημείο Α  
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ**



2. ΚΑΜΠΥΛΗ (ΤΗΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΠΟΙΟΥΜΕ).

**ΥΠΕΡΒΟΛΗ περιστρεφόμενη περί το σημείο A  
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ**



**Έστω η καμπύλη (Υπερβολή):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$**

Παραμετρικές εξισώσεις της Υπερβολής :  $x = a \cdot \cosh(t)$  ,  $y = b \cdot \sinh(t)$  ,  $-\infty < t < +\infty$  .

**S.O.S. Γιά να εμφανιστούν και τα δύο (2) σκέλη παίρνουμε  $\pm a$  .**

>  $a := [1.5, -1.5]$  (19)  
                          $a := [1.5, -1.5]$

>  $b := 1 :$

>  $seq([a[i] \cdot \cosh(t), b \cdot \sinh(t)], i = 1 .. 2)$  (20)

$$[1.5 \cosh(t), \sinh(t)], [-1.5 \cosh(t), \sinh(t)] \quad (20)$$

>  $XC[1] := (20)[1][1]$   $XC_1 := 1.5 \cosh(t)$  (21)

>  $YC[1] := (20)[1][2]$   $YC_1 := \sinh(t)$  (22)

>  $XC[2] := (20)[2][1]$   $XC_2 := -1.5 \cosh(t)$  (23)

>  $YC[2] := (20)[2][2]$   $YC_2 := \sinh(t)$  (24)

>

**Με την περιστροφή περί το σημείο A κατά γωνία  $\phi$  από την Αρχική θέση της ΚΑΜΠΥΛΗΣ οι συντεταγμένες [XC[i], YC[i]], γίνονται [XC1, YC1], [XC2, YC2].**

$$X_B := \cos(\phi) \cdot (X_A - O_1) - \sin(\phi) \cdot (Y_A - O_2) + O_1$$

$$Y_B := \sin(\phi) \cdot (X_A - O_1) + \cos(\phi) \cdot (Y_A - O_2) + O_2$$

>  $XC1 := \cos(\phi) \cdot (XC[1] - A[1]) - \sin(\phi) \cdot (YC[1] - A[2]) + A[1]$   
 $XC1 := \cos(\phi) (1.5 \cosh(t) - 1.50) - \sin(\phi) (\sinh(t) + 2.00) + 1.50$  (25)

>  $YC1 := \sin(\phi) \cdot (XC[1] - A[1]) + \cos(\phi) \cdot (YC[1] - A[2]) + A[2]$   
 $YC1 := \sin(\phi) (1.5 \cosh(t) - 1.50) + \cos(\phi) (\sinh(t) + 2.00) - 2.00$  (26)

>  $XC2 := \cos(\phi) \cdot (XC[2] - A[1]) - \sin(\phi) \cdot (YC[2] - A[2]) + A[1]$   
 $XC2 := \cos(\phi) (-1.5 \cosh(t) - 1.50) - \sin(\phi) (\sinh(t) + 2.00) + 1.50$  (27)

>  $YC2 := \sin(\phi) \cdot (XC[2] - A[1]) + \cos(\phi) \cdot (YC[2] - A[2]) + A[2]$   
 $YC2 := \sin(\phi) (-1.5 \cosh(t) - 1.50) + \cos(\phi) (\sinh(t) + 2.00) - 2.00$  (28)

>

**Μετά την περιστροφή η καμπύλη έχει παραμετρικές εξισώσεις :**

>  $evalf\left(subs\left(\phi = -\frac{\text{Pi}}{6}, XC1\right)\right)$   
 $1.299038106 \cosh(t) + 1.200961894 + 0.5000000002 \sinh(t)$  (29)

>  $evalf\left(subs\left(\phi = -\frac{\text{Pi}}{6}, YC1\right)\right)$   
 $-0.7500000003 \cosh(t) + 0.482050807 + 0.8660254037 \sinh(t)$  (30)

>  $evalf\left(subs\left(\phi = -\frac{\text{Pi}}{6}, XC2\right)\right)$   
 $-1.299038106 \cosh(t) + 1.200961894 + 0.5000000002 \sinh(t)$  (31)

```

> evalf(subs( $\phi = -\frac{\text{Pi}}{6}$ , YC2))
    0.7500000003  $\cosh(t) + 0.482050807 + 0.8660254037 \sinh(t)$  (32)

>
> pointA := pointplot(A, symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=red):
> textA := textplot([A[1] + 0.15, A[2] - 0.25, "Α"], font=[arial, bold, 14]):
> ARXKAMPYLH := plot([[XC[1], YC[1], t=-2..2], [XC[2], YC[2], t=-2..2]], color=blue, thickness=1, legend=["ΑΡΧΙΚΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗ", "ΑΡΧΙΚΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗ"]):
> TELKAMPYLH := plot([(29), (30), t=-2..2], [(31), (32), t=-2..2]], color=red, thickness=10, linestyle=3, legend=["ΤΕΛΙΚΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗ", "ΤΕΛΙΚΗ ΥΠΕΡΒΟΛΗ"]):
> animKAMPYLH := animate(plot, [[XC1, YC1, t=-2..2], [XC2, YC2, t=-2..2]], color=red, thickness=1, linestyle=4],  $\phi = 0 .. -\frac{\text{Pi}}{6}$ , frames=41, trace=10):
> ROTline := rotate(ARXKAMPYLH, - $\frac{\text{Pi}}{6}$ , A):
>
> display(pointA, textA, ARXKAMPYLH, TELKAMPYLH, animKAMPYLH, ROTline, title="ΥΠΕΡΒΟΛΗ περιστρεφόμενη περί το σημείο Α\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont=[arial, bold, 14], gridlines, view=[-6..6, -6..6])

```

**ΥΠΕΡΒΟΛΗ περιστρεφόμενη περί το σημείο Α  
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ**

