```
> with(plots) :
> with(Student[VectorCalculus]) :
>
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
>
```

Θέμα :

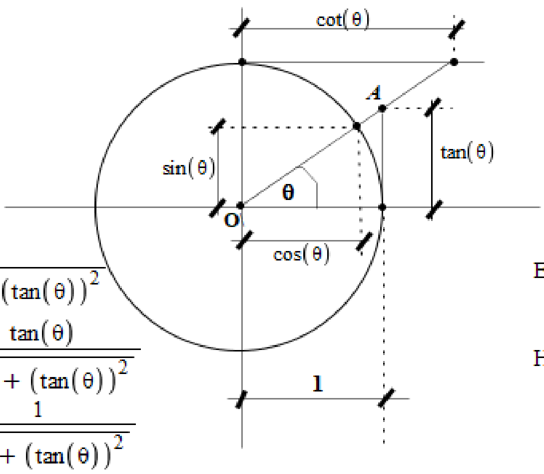
Στην επιφάνεια Σφαίρας , με κέντρο (0,0,0) και ακτίνα r έχουμε δύο σημεία A ,B , με συντεταγμένες :
$A(\theta_A, \phi_A)$, $B(\theta_B, \phi_B)$.

Να βρούμε τις Εξισώσεις της Γραμμής Ελάχιστου μήκους **(ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ)** που συνδέει τα δύο σημεία , να υπολογίσουμε το μήκος της και να την χαράξουμε .

Η συνήθης παραμέτρηση της μοναδιαίας σφαίρας S^2 δίνεται από τις συντεταγμένες του γεωγραφικού πλάτους θ και του γεωγραφικού μήκους φ και είναι:

$$\sigma(\theta,\phi) = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, \sin\theta)$$

Τριγωνομετρικός Κύκλος



$(OA) = \sqrt{1^2 + (\tan(\theta))^2}$

$\sin(\theta) = \dfrac{\tan(\theta)}{\sqrt{1^2 + (\tan(\theta))^2}}$

$\cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (\tan(\theta))^2}}$

Σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας
Παραμετρικές εξισώσεις :

$x = \cos(\theta)\cdot\cos(\phi)$
$y = \cos(\theta)\cdot\sin(\phi)$
$z = \sin(\theta)$

όπου : θ =Γεωγραφικό πλάτος
φ=Γεωγραφικό μήκος

Επίπεδο διερχόμενο από το κέντρο της Σφαίρας
$z = a\cdot x + b\cdot y$

Η Τομή Σφαίρας- Επιπέδου επαληθεύει την σχέση

$\sin(\theta) = a\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi) + b\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi) \Rightarrow$
$\tan(\theta) = a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi) \Rightarrow$
$\theta = \tan^{-1}(a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))$

Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης **(Μέγιστος κύκλος)**
τομής Σφαίρας με Επίπεδο $z = a\cdot x + b\cdot y$ διερχόμενο από το κέντρο της Σφαίρας

$$x = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\cos(\phi)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\sin(\phi)$$

$$z = \frac{a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi)}{\sqrt{1^2 + (a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))^2}}$$

Εξισώσεις Euler-Lagrange .

Αν η συνάρτηση y είναι σημείο όπου το συναρτησοειδές :

$$J(y)=\int_a^b L(x,y,y')\,dx \quad \text{λαμβάνει τοπικό ελάχιστο ,}$$

όπου : $L(x,y,y')$: η Lagrangian , $y \in C^2[a,b]$ και $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$

τότε η y **(Αναγκαία Συνθήκη)** πληροί την εξίσωση :

$$\frac{\partial}{\partial y}L(x,y,y')-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}L(x,y,y')\right)=0 \text{ , Εξίσωση Euler-Lagrange .}$$

$$\text{Αν : } L=L(x,y(x)) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}L(x,y(x))=0 \Rightarrow L(x,y(x))=const \text{ (Αλγεβρική εξίσωση)}$$

$$\text{Αν : } L=L(x,y'(x)) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}L(x,y'(x))\right)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y'}L(x,y'(x))=const.$$

Αν η Lagrangian δεν εξαρτάται ρητά από το x

$$\text{Αν } L=L(y(x),y'(x)) \Rightarrow L(y(x),y'(x))-y'(x)\cdot\frac{\partial}{\partial y'}L(y(x),y'(x))=const$$

Απόδειξη

$$\frac{d}{dx}\left(L-y'\cdot\frac{\partial}{\partial y'}L\right)=\frac{\partial}{\partial y}L\cdot y'+\frac{\partial}{\partial y'}\cdot y''-y''\cdot\frac{\partial}{\partial y'}L-y'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}L\right)=\frac{\partial}{\partial y}L\cdot y'-y'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}L\right)=y'\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}L-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}L\right)\right)}_{0}=0$$

Επομένως ισχύει η προς απόδειξη : $L-y'\cdot\frac{\partial}{\partial y'}L=const.$

ΑΚΟΛΟΥΘΩΝΤΑΣ ΤΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ :

ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΤΗΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ : $\overrightarrow{r(\theta)} := \langle x(\theta), y(\theta), z(\theta)\rangle$. Έστω Χρόνος t.

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ (ΠΡΩΤΑ) ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ sOM : s:=int($\sqrt{(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2+(z'(\theta))^2}$, θ), (που είναι συνάρτηση της παραμέτρου θ.). Έστω Χρόνος t.

Εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{TM}=\left\langle \frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right\rangle=\left\langle\left(\frac{ds}{dx}\right)^{-1},\left(\frac{ds}{dy}\right)^{-1},\left(\frac{ds}{dz}\right)^{-1}\right\rangle=<\left[\frac{ds}{d\theta}\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\right]^{-1},\left[\frac{ds}{d\theta}\cdot\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\right]^{-1},\left[\frac{ds}{d\theta}\cdot\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\right]^{-1}>=<\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{dx}{d\theta}\right),\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{dy}{d\theta}\right),\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{dz}{d\theta}\right)>$ στο σημείο M(x,y,z) . (Κανόνας Αλυσίδας στην παραγώγιση) .

Ακτίνα καμπυλότητας **R** ,στο σημείο M(x,y,z) (Κανόνας Αλυσίδας στην παραγώγιση): $\frac{d}{ds}\vec{T}=\frac{1}{R}\cdot\vec{N} \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\vec{T}\cdot\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1}=\frac{1}{R}\cdot\vec{N} \Rightarrow \left|\frac{d}{d\theta}\vec{T}\right|=\frac{\left|\frac{ds}{d\theta}\right|\cdot 1}{R} \Rightarrow R=\frac{\left|\frac{ds}{d\theta}\right|}{\left|\frac{d}{d\theta}\vec{T}\right|}$.

Καμπυλότητα K , στο Σημείο M(x,y,z) : K=1/R

Κάθετο Μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{NM}$, στο Σημείο M(x,y,z) : $\overrightarrow{NM}=R\cdot\frac{d}{ds}\vec{T}=R\cdot\frac{d}{d\theta}\vec{T}\cdot\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1}$

Μοναδιαίο διάνυσμα : $\overrightarrow{BM}=\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$

Ταχύτητα : $\vec{v}=\frac{d}{dt}\vec{r}=\frac{d}{ds}\vec{r}\cdot\frac{d}{dt}s=\vec{T}\cdot\frac{d}{dt}s$

Επιτάχυνση : $\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(\vec{T}\cdot\frac{d}{dt}s\right)=\frac{d^2}{dt^2}s\cdot\vec{T}+\frac{d}{dt}s\cdot\frac{d}{dt}\vec{T}=\frac{d^2}{dt^2}s\cdot\vec{T}+\frac{d}{dt}s\cdot\left(\frac{d}{ds}\vec{T}\cdot\frac{d}{dt}s\right)=\frac{d^2}{dt^2}s\cdot\vec{T}+\left(\frac{d}{dt}s\right)^2\cdot\frac{1}{R}\cdot\vec{N}=\frac{d^2}{dt^2}s\cdot\vec{T}+K\left(\frac{d}{dt}s\right)^2\cdot\vec{N}$

Επιτάχυνση : $\vec{a}=\frac{d^2}{dt^2}s\cdot\vec{T}+K\left(\frac{d}{dt}s\right)^2\cdot\vec{N} \rightarrow \vec{a}=a_T\cdot\vec{T}+a_N\cdot\vec{N}$ όπου : $a_T=\frac{d^2}{dt^2}s=\frac{d}{dt}|\vec{v}|$ και $a_N=K\left(\frac{d}{dt}s\right)^2=K\cdot|\vec{v}|^2$, $a_N=\sqrt{|\vec{a}|^2-a_T^2}$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΩΝ :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(E\cdot\dot{u}+F\cdot\dot{v}\right)=\dfrac{1}{2}\left(E_u\cdot\dot{u}^2+2F_u\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G_u\,\dot{v}^2\right) \\ \dfrac{d}{dt}\left(F\cdot\dot{u}+G\cdot\dot{v}\right)=\dfrac{1}{2}\left(E_v\cdot\dot{u}^2+2F_v\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G_v\,\dot{v}^2\right) \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Μήκος τόξου καμπύλης με διανυσματική παραμετρική εξίσωση $\vec{r}=\vec{r}(u(t),v(t))$:
πάνω στην επιφάνεια S με διανυσματική παραμετρική εξίσωση : $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$:

$E=\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)$:

$F=\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)$:

$G=\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)\cdot\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)$:

$$Int\left(\sqrt{E\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2\cdot F\cdot\left(\frac{du}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right)+G\cdot\left(\frac{dv}{dt}\right)^2},t=t[1]..t[2]\right)=Int\left(\sqrt{E\cdot\dot{u}^2+2\cdot F\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G\cdot\dot{v}^2},t=t[1]..t[2]\right):$$

$$L:=\sqrt{E\cdot\dot{u}^2+2\cdot F\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G\cdot\dot{v}^2}:$$

Η *Lagrangian L* ΔΕΝ εξαρτάται ρητά από την *t*

$\rightarrow \frac{d}{dt}L=0$

Εφαρμογή των Διαφορικών εξισώσεων Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{u}}L\right)-\frac{\partial}{\partial u}L=0:$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{v}}L\right)-\frac{\partial}{\partial v}L=0:$$

$$\frac{\partial}{\partial\dot{u}}L=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot E\cdot\dot{u}+2\cdot F\cdot\dot{v})}{L}=\frac{(E\cdot\dot{u}+F\cdot\dot{v})}{L}$$

$$\frac{\partial}{\partial u}L=\frac{1}{2}\cdot\frac{(E_u\cdot\dot{u}^2+2\cdot F_u\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G_u\cdot\dot{v}^2)}{L}$$

$$\frac{d}{dt}(E\cdot\dot{u}+F\cdot\dot{v})=\frac{1}{2}\cdot\left(E_u\cdot\dot{u}^2+2\cdot F_u\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G_u\cdot\dot{v}^2\right)$$ **1η Διαφορική εξίσωση**

$$\frac{\partial}{\partial\dot{v}}L=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2\cdot F\cdot\dot{u}+2\cdot G\cdot\dot{v})}{L}=\frac{(F\cdot\dot{u}+G\cdot\dot{v})}{L}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}L=\frac{1}{2}\cdot\frac{(E_v\cdot\dot{u}^2+2\cdot F_v\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G_v\cdot\dot{v}^2)}{L}$$

$$\frac{d}{dt}(F\cdot\dot{u}+G\cdot\dot{v})=\frac{1}{2}\cdot\left(E_v\cdot\dot{u}^2+2\cdot F_v\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G_v\cdot\dot{v}^2\right)$$ **2η Διαφορική εξίσωση**

Στην Επιφάνεια εκ Περιστροφής :

$$\vec{r}(u,v)=[f(u)\cdot\cos(v),f(u)\cdot\sin(v),g(u)]$$

Καμπύλη στο x-z συντεταγμένο επίπεδο : $\vec{r}(u)=f(u)\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+g(u)\cdot\vec{k}$.
Περιστροφή γύρω από τον άξονα OZ .

Το σύστημα των Γεωδαισιακών γίνεται :

$$\ddot{u}(t)=f(u)\cdot diff(f(u),u)\cdot(diff(v(t),t))^2$$

$$diff\left(f^2(u)\cdot diff(v(t),t),t\right)=0$$

Στην Επιφάνεια εκ Περιστροφής :

$\vec{r}(u, v) = [f(u)\cdot\cos(v), f(u)\cdot\sin(v), g(u)]$

Καμπύλη στο x-z συντεταγμένο επίπεδο : $\vec{r}(u) = f(u)\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + g(u)\cdot\vec{k}$.
Περιστροφή γύρω από τον άξονα OZ .

$$E = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}.\frac{\partial}{\partial u}\vec{r} = \left[\frac{d}{du}f(u)\cdot\cos(v), \frac{d}{du}f(u)\cdot\sin(v), \frac{d}{du}g(u)\right].\left[\frac{d}{du}f(u)\cdot\cos(v), \frac{d}{du}f(u)\cdot\sin(v), \frac{d}{du}g(u)\right] = \left(\frac{d}{du}f(u)\cdot\cos(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{du}f(u)\cdot\sin(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{du}g(u)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{d}{du}f(u)\right)^2 + \left(\frac{d}{du}g(u)\right)^2$$

$$F = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}.\frac{\partial}{\partial v}\vec{r} = \left[\frac{d}{du}f(u)\cdot\cos(v), \frac{d}{du}f(u)\cdot\sin(v), \frac{d}{du}g(u)\right].[f(u)\cdot diff(\cos(v), v), f(u)\cdot diff(\sin(v), v), 0] = \left[\frac{d}{du}f(u)\cdot\cos(v), \frac{d}{du}f(u)\cdot\sin(v), \frac{d}{du}g(u)\right].[-f(u)\cdot\sin(v), f(u)\cdot\cos(v), 0] = 0$$

$$G = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}.\frac{\partial}{\partial v}\vec{r} = [f(u)\cdot diff(\cos(v), v), f(u)\cdot diff(\sin(v), v), 0].[f(u)\cdot diff(\cos(v), v), f(u)\cdot diff(\sin(v), v), 0] = (f(u))^2$$

Μήκος Καμπύλης $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$ πάνω στην Επιφάνεια εκ Περιστροφής

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\left(\frac{d}{du}f(u)\right)^2 + \left(\frac{d}{du}g(u)\right)^2\right)\cdot\left(\frac{d}{dt}(u(t))\right)^2 + (f(u))^2\cdot\left(\frac{d}{dt}(v(t))\right)^2}\, dt$$

Μήκος Μεσημβρινού πάνω στην Επιφάνεια εκ Περιστροφής $(v = const)$

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{d}{du}f(u)\cdot\cos(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{du}f(u)\cdot\sin(v)\right)^2 + \left(\frac{d}{du}g(u)\right)^2}\, du = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{E}\, du$$

Γιά τυχαία καμπύλη Μοναδιαίας ταχύτητας πάνω

στην Επιφάνεια εκ περιστροφής

$$E\cdot\left(\frac{d}{ds}u(s)\right)^2 + G\cdot\left(\frac{d}{ds}v(s)\right)^2 = 1 \qquad (a)$$

Γιά Μεσημβρινό Μοναδιαίας ταχύτητας πάνω στην Επιφάνεια εκ περιστροφής : $v(s) = const. \Rightarrow \frac{d}{ds}v(s) = 0$

εξ ορισμού : $|\vec{T}| = 1$

$$E = \vec{T}.\vec{T} = 1$$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ (ρ,φ,z) :

Στοιχειώδες Μήκος (Μετατόπιση) : $ds := \sqrt{(\rho\cdot d\phi)^2 + dz^2} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2}\cdot d\phi = \sqrt{1 + \rho^2\cdot\left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2}\cdot dz$

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ (r,θ,φ) : $\vec{r} := r\sin(\theta)\cos(\phi)\,\hat{i} + r\sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{j} + r\cos(\theta)\,\hat{k}$

Στοιχειώδες Μήκος (Μετατόπιση) : $ds := r\cdot\sqrt{(d\theta)^2 + (\sin(\theta)\cdot d\phi)^2} = r\cdot\sqrt{\left(\frac{d}{d\phi}\theta(\phi)\right)^2 + \sin(\theta(\phi))^2}\, d\phi = r\cdot\sqrt{1 + \sin^2(\theta(\phi))\cdot\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$

>

> $R := 1$

$$R := 1 \qquad \textbf{(1)}$$

ΛΥΣΗ 1 :

Η συνήθης παραμέτρηση της μοναδιαίας σφαίρας S^2 δίνεται από τις συντεταγμένες του γεωγραφικού πλάτους θ και του γεωγραφικού μήκους φ και είναι:

$$\sigma(\theta,\phi)=(\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,\sin\theta)$$

> $r\_ := R\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)\cdot\_i + R\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi)\cdot\_j + R\cdot\sin(\theta)\cdot\_k$

$$\vec{r} := \cos(\theta)\cos(\phi)\,\hat{i} + \cos(\theta)\sin(\phi)\,\hat{j} + \sin(\theta)\,\hat{k} \qquad \textbf{(2)}$$

> $Hrb := [Component(r\_, 1), Component(r\_, 2), Component(r\_, 3)]$

$$Hrb := [\cos(\theta)\cos(\phi), \cos(\theta)\sin(\phi), \sin(\theta)] \qquad \textbf{(3)}$$

> $rc\_ := R\cdot\cos(\theta(t))\cdot\cos(\phi(t))\cdot\_i + R\cdot\cos(\theta(t))\cdot\sin(\phi(t))\cdot\_j + R\cdot\sin(\theta(t))\cdot\_k$

$$\vec{rc} := \cos(\theta(t))\cos(\phi(t))\,\hat{i} + \cos(\theta(t))\sin(\phi(t))\,\hat{j} + \sin(\theta(t))\,\hat{k} \qquad \textbf{(4)}$$

> $diff(r\_, \theta)$

$$-\sin(\theta)\cos(\phi)\,\hat{i} - \sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{j} + \cos(\theta)\,\hat{k} \qquad \textbf{(5)}$$

> $diff(r\_, \phi)$

$$-\cos(\theta)\sin(\phi)\,\hat{i} + \cos(\theta)\cos(\phi)\,\hat{j} \qquad \textbf{(6)}$$

> $E := simplify(diff(r\_, \theta).diff(r\_, \theta))$

$$E := 1 \qquad \textbf{(7)}$$

> $F := diff(r\_, \theta).diff(r\_, \phi)$

$$F := 0 \qquad \textbf{(8)}$$

> $G := simplify(diff(r\_, \phi).diff(r\_, \phi))$

$$G := \cos(\theta)^2 \qquad \textbf{(9)}$$

> $MHKOSCURVE := int\big(\mathrm{sqrt}\big(E\cdot(diff(\theta(t), t))^2 + 2\cdot F\cdot diff(\theta(t), t)\cdot diff(\phi(t), t) + G\cdot(diff(\phi(t), t))^2\big), t\big)$

$$MHKOSCURVE := \int\sqrt{\dot{\theta}(t)^2 + \cos(\theta)^2\,\dot{\phi}(t)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \textbf{(10)}$$

>

> $ode := diff(E\cdot diff(\theta(t), t) + F\cdot diff(\phi(t), t), t) = \frac{1}{2}\cdot\big(diff(E, \theta)\cdot(diff(\theta(t), t))^2 + 2\cdot diff(F, \theta)\cdot diff(\theta(t), t)\cdot diff(\phi(t), t) + diff(G, \theta)\cdot(diff(\phi(t), t))^2\big)$

$$ode := \ddot{\theta}(t) = -\cos(\theta)\sin(\theta)\,\dot{\phi}(t)^2 \qquad \textbf{(11)}$$

>

Η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι ισοδύναμη με την παρακάτω Διαφορική Εξίσωση :!!!(προς ΑΠΟΔΕΙΞΗ)

$$\dot{\theta}^2(t) + \cos^2(\theta)\cdot\dot{\phi}^2(t) = 1$$

> $ode1 := (diff(\theta(t), t))^2 = 1 - (diff(\phi(t), t))^2\cdot\cos^2(\theta)$

$$ode1 := \dot{\theta}(t)^2 = 1 - \cos(\theta)^2\,\dot{\phi}(t)^2 \qquad \textbf{(12)}$$

>

> $ode2 := diff(F\cdot diff(\theta(t), t) + G\cdot diff(\phi(t), t), t) = \frac{1}{2}\cdot\big(diff(E, \phi)\cdot(diff(\theta, t))^2 + 2$

$$\cdot diff(F,\phi)\cdot diff(\theta(t),t)\cdot diff(\phi(t),t)+diff(G,\phi)\cdot\left(diff(\phi(t),t)\right)^2)$$

$$ode2 := \cos(\theta)^2\,\ddot{\phi}(t)=0 \tag{13}$$

> $\cos^2(\theta)\cdot diff(\phi(t),t)=\Omega$

$$\cos(\theta)^2\,\dot{\phi}(t)=\Omega \tag{14}$$

> $isolate(\mathbf{(14)}, diff(\phi(t),t))$

$$\dot{\phi}(t)=\frac{\Omega}{\cos(\theta)^2} \tag{15}$$

> $subs(\mathbf{(15)}, ode1)$

$$\dot{\theta}(t)^2=1-\frac{\Omega^2}{\cos(\theta)^2} \tag{16}$$

> $(lhs(\mathbf{(15)}))^2=(rhs(\mathbf{(15)}))^2$

$$\dot{\phi}(t)^2=\frac{\Omega^2}{\cos(\theta)^4} \tag{17}$$

> $simplify(\mathrm{sqrt}(lhs(\mathbf{(16)}))=\mathrm{sqrt}(rhs(\mathbf{(16)})))$

$$\mathrm{csgn}(\dot{\theta}(t))\,\dot{\theta}(t)=\frac{\sqrt{\cos(\theta)^2-\Omega^2}}{|\cos(\theta)|} \tag{18}$$

> $simplify(\mathrm{sqrt}(lhs(\mathbf{(17)}))=\mathrm{sqrt}(rhs(\mathbf{(17)})))$

$$\mathrm{csgn}(\dot{\phi}(t))\,\dot{\phi}(t)=\frac{\mathrm{csgn}(\Omega)\,\Omega}{\cos(\theta)^2} \tag{19}$$

> $simplify\left(\frac{lhs(\mathbf{(19)})}{lhs(\mathbf{(18)})}\right)=simplify\left(\frac{rhs(\mathbf{(19)})}{rhs(\mathbf{(18)})}\right)$

$$\frac{\mathrm{csgn}(\dot{\phi}(t))\,\dot{\phi}(t)\,\mathrm{csgn}(\dot{\theta}(t))}{\dot{\theta}(t)}=\frac{\Omega\,\mathrm{csgn}(\Omega)}{\sqrt{\cos(\theta)^2-\Omega^2}\,|\cos(\theta)|} \tag{20}$$

> $diff(\phi(\theta),\theta)=\dfrac{1}{\cos(\theta)\cdot\sqrt{\Omega^{-2}\cdot\cos^2(\theta)-1}}$

$$\frac{d}{d\theta}\phi(\theta)=\frac{1}{\cos(\theta)\sqrt{\frac{\cos(\theta)^2}{\Omega^2}-1}} \tag{21}$$

>

Κάνουμε την αντικατάσταση : $u=\tan(\theta)$

$$du=\frac{1}{\cos^2(\theta)}\cdot d\theta: \qquad u=\tan(\theta)\Rightarrow\theta=\tan^{-1}(u):\Rightarrow\cos(\theta)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$d\theta=du\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)^2=du\cdot\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\sqrt{\frac{\Omega^{-2}\cdot 1}{1+u^2}-1}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot\sqrt{(\Omega^{-2}-1)-u^2}\right)=\frac{1}{1+u^2}\cdot\sqrt{(\Omega^{-2}-1)-u^2}\Rightarrow\int\frac{1}{\sqrt{(\Omega^{-2}-1)-u^2}}\,du$$

Θέτουμε :

$$u=\sqrt{\Omega^{-2}-1}\cdot\sin(t) \Rightarrow du=\sqrt{\Omega^{-2}-1}\cdot\cos(t)\cdot dt \Rightarrow \int \frac{\left(\sqrt{\Omega^{-2}-1}\cdot\cos(t)\right)}{\left(\sqrt{\Omega^{-2}-1-(\Omega^{-2}-1)\cdot\sin^2(t)}\right)}\cdot dt \;\Rightarrow\; \int \frac{\left(\sqrt{\Omega^{-2}-1}\cdot\cos(t)\right)}{\left(\sqrt{(\Omega^{-2}-1)\cdot\cos^2(t)}\right)}\,dt = \int \frac{\left(\sqrt{\Omega^{-2}-1}\cdot\cos(t)\right)}{\left(\sqrt{(\Omega^{-2}-1)}\cdot\cos(t)\right)}\,dt = t = \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{\Omega^{-2}-1}}\right)$$

$$\int \frac{1}{\cos(\theta)\sqrt{\frac{\cos(\theta)^2}{\Omega^2}-1}}\,d\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{\Omega^{-2}-1}}\right)=\phi-C \Rightarrow \sin(\phi-C)=\frac{\tan(\theta)}{\sqrt{\Omega^{-2}-1}} \Rightarrow \tan(\theta)=\sin(\phi-C)\cdot\sqrt{\Omega^{-2}-1} \Rightarrow$$

$$\tan(\theta)=(\sin(\phi)\cos(C)-\cos(\phi)\sin(C))\cdot\sqrt{\Omega^{-2}-1} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\tan(\theta)=a\cdot\cos(\theta)+b\cdot\sin(\theta)}$$

όπου : $a=-\sin(C)\sqrt{\Omega^{-2}-1}$, $b=\cos(C)\cdot\sqrt{\Omega^{-2}-1}$

Σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας

Παραμετρικές εξισώσεις :

$$x=\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)$$
$$y=\cos(\theta)\cdot\sin(\phi)$$
$$z=\sin(\theta)$$

όπου : θ =Γεωγραφικό πλάτος
φ=Γεωγραφικό μήκος

Επίπεδο διερχόμενο από το κέντρο της Σφαίρας

$$z=a\cdot x+b\cdot y$$

Η Τομή Σφαίρας- Επιπέδου επαληθεύει την σχέση

$$\sin(\theta)=a\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)+b\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi) \Rightarrow$$
$$\tan(\theta)=a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi) \Rightarrow$$
$$\theta=\tan^{-1}(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))$$

3-Σφαίρα ακτίνας r · (Υπερεπιφάνεια -Hypersurface)

$$x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$$

Παραμετρικές εξισώσεις :

$$x=r\cdot\sin(\chi)\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)$$
$$y=r\cdot\sin(\chi)\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi)$$
$$z=r\cdot\sin(\chi)\cdot\sin(\theta)$$
$$w=r\cdot\cos(\chi)$$

όπου :θ=Γεωγραφικό πλάτος
φ=Γεωγραφικό μήκος

Επαλήθευση :

$$simplify(subs(\{x=r\cdot\sin(\chi)\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi), y=r\cdot\sin(\chi)\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi), z=r\cdot\sin(\chi)\cdot\sin(\theta), w=r\cdot\cos(\chi)\}, lhs(x^2+y^2+z^2+w^2=r^2)))=r^2$$

>

>

>

>

3-Σφαίρα ακτίνας r · (Υπερεπιφάνεια -Hypersurface)

Παραμετρικές εξισώσεις :

> $x^2+y^2+z^2+w^2=r^2$:

> $x=r\cdot\sin(\chi)\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)$:

> $y=r\cdot\sin(\chi)\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi)$:

> $z=r\cdot\sin(\chi)\cdot\sin(\theta)$:

> $w=r\cdot\cos(\chi)$:

>

όπου :θ=Γεωγραφικό πλάτος
φ=Γεωγραφικό μήκος

Επαλήθευση :

>

> $simplify(subs(\{x=r\cdot\sin(\chi)\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\phi), y=r\cdot\sin(\chi)\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\phi), z=r\cdot\sin(\chi)\cdot\sin(\theta), w=r\cdot\cos(\chi)\}, lhs(x^2+y^2+z^2+w^2=r^2)))=r^2$:

>

>

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ :
GP : Γεωγραφικό Πλάτος
GM: Γεωγραφικό μήκος
B: ΒΕΡΟΙΑ
GR: ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ
M: ΜΟΣΧΑ
S: ΣΙΔΝΕΫ
LS: ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ
KT: ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ

ΚΛΙΣΗ ΑΞΟΝΑ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ της ΓΗΣ ως προς την κατακόρυφο : $23, 439247^{\circ}=0.40909\,rad$.
$\boxed{\text{Μέση ακτίνα ΓΗΣ :6371 km .}}$
Αφήλιο :152.098.232 km , Περιήλιο :147.098.290 km , Εκκεντρότητα :0.01671123 .
Μεγάλος Ημιάξονας Ελλειπτικής : α=149.598.261 km **(5)**,⇒c=2.499.971 km **(1)**
Μικρός Ημιάξονας Ελλειπτικής :b=149.577.371 km **(4)**.

ΒΕΡΟΙΑ : $(GP_B=40^0 31'11.9''\,N, GM_B=22^0 12'7''E)$: $40+\frac{31}{60}+\frac{11.9}{3600}=40.51997223$ $evalf\left(22+\frac{12}{60}+\frac{7}{3600}\right)=22.20194444$

ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ : $(GP_{GR}=51^0 28'59.3''\,N, GM_{GR}=0)$: $51+\frac{28}{60}+\frac{59.3}{3600}=51.48313889$ $0=0$

ΜΟΣΧΑ : $(GP_M=55^0 45'14''\,N, GM_M=37^0 37'13.1''E)$ $evalf\left(55+\frac{45}{60}+\frac{14}{3600}\right)=55.75388889$ $37+\frac{37}{60}+\frac{13.1}{3600}=37.62030556$

ΣΙΔΝΕΫ : $(GP_S=33^0 51'23.9''\,S, GM_S=151^0 12'56.1''E)$: $-33-\frac{51}{60}-\frac{23.9}{3600}=-33.85663889$ $151+\frac{12}{60}+\frac{56.1}{3600}=151.2155833$

ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ : $(GP_{LS}=34^0 06'48.0''\,N, GM_{LS}=118^0 19'46.9''W)$: $evalf\left(34+\frac{06}{60}+\frac{48}{3600}\right)=34.11333333$ $-\left(118+\frac{19}{60}+\frac{46.9}{3600}\right)=-118.3296945$

ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ : $(GP_{KT}=33^0 54'16.6''\,S, GM_{KT}=18^0 24'36.6''E)$: $evalf\left(-\left(33+\frac{6}{60}+\frac{48}{3600}\right)\right)=-33.11333333$ $18+\frac{24}{60}+\frac{36.6}{3600}=18.41016667$

>

Εξίσωση Επιπέδου που περνάει από τα Α,Β και το Κέντρο της Σφαίρας .

>

Έστωσαν οι Γεωγραφικές Συντεταγμένες των Α(Βέροια) & Β (Σίδνεϋ) :

> $\theta A := \frac{40.51997223}{180}\cdot \mathrm{Pi}$:

> $\phi A := \frac{22.201944444}{180}\mathrm{Pi}$:

> $\theta B := -\frac{33.85663889}{180}\cdot \mathrm{Pi}$:

> $\phi B := \frac{151.2155833}{180}\cdot \mathrm{Pi}$:

>

> $\boldsymbol{A} := evalf\left(subs\left(\left\{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta A},\ \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi A}\right\}, Hrb\right)\right)$

$$A := [0.7038181218, 0.2872507189, 0.6497130720] \quad (22)$$

> $\boldsymbol{B} := evalf\left(subs\left(\left\{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta B},\ \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi B}\right\}, Hrb\right)\right)$

$$B := [-0.7278237717, 0.3998667620, -0.5571168010] \quad (23)$$

>

> $rA\_ := A[1]\cdot\_i + A[2]\cdot\_j + A[3]\cdot\_k$

$$\overrightarrow{rA} := 0.7038181218\ \hat{i} + 0.2872507189\ \hat{j} + 0.6497130720\ \hat{k} \quad (24)$$

> $rB\_ := B[1]\cdot\_i + B[2]\cdot\_j + B[3]\cdot\_k$

$$\overrightarrow{rB} := -0.7278237717\ \hat{i} + 0.3998667620\ \hat{j} - 0.5571168010\ \hat{k} \quad (25)$$

> $EEPIPED := evalf\left((rA\_ \times rB\_).(x\cdot\_i + y\cdot\_j + z\cdot\_k) = 0\right)$

$$EEPIPED := -0.4198308639\ x - 0.0807677181\ y + 0.4905013751\ z = 0. \quad (26)$$

> $isolate(\textbf{(26)}, z)$

$$z = 0.8559218897\ x + 0.1646635916\ y \quad (27)$$

> $EPIPEDO := lhs(\textbf{(27)}) - rhs(\textbf{(27)})$

$$EPIPEDO := z - 0.8559218897\ x - 0.1646635916\ y \quad (28)$$

>

> $a := coeff(rhs(\textbf{(27)}), x)$

$$a := 0.8559218897 \quad (29)$$

> $b := coeff(rhs(\textbf{(27)}), y)$

$$b := 0.1646635916 \quad (30)$$

>

Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης **(Μέγιστος κύκλος)**
τομής Σφαίρας με Επίπεδο $z = a\cdot x + b\cdot y$ διερχόμενο από το κέντρο της Σφαίρας

$$x = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\cos(\phi)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\sin(\phi)$$

$$z = \frac{a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi)}{\sqrt{1^2 + (a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))^2}}$$

> $X := R\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\cos(\phi)$

$$X := \frac{\cos(\phi)}{\sqrt{1 + (0.8559218897\cos(\phi) + 0.1646635916\sin(\phi))^2}} \quad (31)$$

> $Y := R\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (a\cdot\cos(\phi) + b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\sin(\phi)$

$$Y := \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1 + (0.8559218897\cos(\phi) + 0.1646635916\sin(\phi))^2}} \quad (32)$$

$$> \; Z := R\cdot\frac{(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}$$

$$Z := \frac{0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)}{\sqrt{1+(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi))^2}} \quad \textbf{(33)}$$

\>

\>

ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ : Γιά R=1

$A := [0.3535533907, 0.3535533908, 0.8660254037]$

$B := [-0.4330127023, 0.7499999997, 0.5000000002]$

$> \; evalf(subs(\phi=\phi A, [X, Y, Z]))$

$$[0.7038181220, 0.2872507190, 0.6497130720] \quad \textbf{(34)}$$

$> \; evalf(subs(\phi=\phi B, [X, Y, Z]))$

$$[-0.7278237721, 0.3998667622, -0.5571168012] \quad \textbf{(35)}$$

$> \; subs(\{x=\textbf{(34)}[1], y=\textbf{(34)}[2], z=\textbf{(34)}[3]\}, \textbf{(27)})$

$$0.6497130720 = 0.6497130721 \quad \textbf{(36)}$$

$> \; subs(\{x=\textbf{(35)}[1], y=\textbf{(35)}[2], z=\textbf{(35)}[3]\}, \textbf{(27)})$

$$-0.5571168012 = -0.5571168012 \quad \textbf{(37)}$$

$> \; AKTINAKAMPYLHS := simplify(\mathrm{sqrt}(X^2+Y^2+Z^2))$

$$AKTINAKAMPYLHS := 1.000000000 \quad \textbf{(38)}$$

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ (AB) :

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΗΚΩΝ ΤΟΞΩΝ

Με βάση τις γωνίες των διανυσμάτων που τα ορίζουν .

Η Καμπύλη $[X, Y, Z]$ είναι ΚΥΚΛΟΣ ακτίνας R :

$R = simplify(\mathrm{sqrt}(X^2+Y^2+Z^2)) = 1$

$$> \; ANGLE := \cos^{-1}\left(\frac{(rA\_.rB\_)}{Norm(rA\_)\cdot Norm(rB\_)}\right)$$

$$ANGLE := 2.433124682 \quad \textbf{(39)}$$

$> \; ABMHKOS := subs(R1 = 6371\,\mathrm{km}, R1\cdot ANGLE)$

$$ABMHKOS := 15501.43735\ \mathrm{km} \quad \textbf{(40)}$$

\>

$> \; EPALHUEYSH := evalf\left(subs\left(R1=6371, \left(int\left(R1\cdot\mathrm{sqrt}\left((diff(X,\phi))^2+(diff(Y,\phi))^2+(diff(Z,\phi))^2\right), \phi=\phi A..\phi B, numeric\right)\right)\right)\right)$

$$EPALHUEYSH := 15501.43735 \quad \textbf{(41)}$$

\>

ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΜΠΥΛΗΣ-ΤΟΜΗΣ $\overrightarrow{Nc}$ στα σημεία A , B :

ΚΑΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ $\overrightarrow{Ns}$ στα σημεία A , B :

ΕΙΝΑΙ ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ .!!!

> $\tan^{-1}(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))$

$$\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)) \tag{42}$$

> $evalf(subs(\phi=\phi A, (42)))$

$$0.7072069280 \tag{43}$$

> $evalf\left(\frac{\mathrm{Pi}}{3}\right)$

$$1.047197551 \tag{44}$$

> $evalf\left(subs\left(\phi=\phi A, subs\left(\theta=(42), \frac{(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}{Norm(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}\right)\right)\right)$

$$-0.7038181217\,\hat{i}-0.2872507189\,\hat{j}-0.6497130719\,\hat{k} \tag{45}$$

> $evalf\left(subs\left(\phi=\phi B, subs\left(\theta=(42), \frac{(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}{Norm(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}\right)\right)\right)$

$$0.7278237713\,\hat{i}-0.3998667618\,\hat{j}+0.5571168008\,\hat{k} \tag{46}$$

> $subs\left(\theta=(42), \frac{(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}{Norm(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}\right)$

$$\Big(-\cos(\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)))^2\cos(\phi)\,\hat{i} - \cos(\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)))^2\sin(\phi)\,\hat{j} - \hat{k}\cos(\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)))\sin(\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)))\Big) \Big/ \Big(\cos(\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)))^4\cos(\phi)^2 + \cos(\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)))^4\sin(\phi)^2 + \cos(\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)))^2\sin(\arctan(0.8559218897\cos(\phi)+0.1646635916\sin(\phi)))^2\Big)^{1/2} \tag{47}$$

> $ANs\_ := evalf\left(subs\left(\{\theta=\theta A, \phi=\phi A\}, \frac{(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}{Norm(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}\right)\right)$

$$\overrightarrow{ANs} := -0.7038181216\,\hat{i}-0.2872507189\,\hat{j}-0.6497130719\,\hat{k} \tag{48}$$

> $Norm((48))$

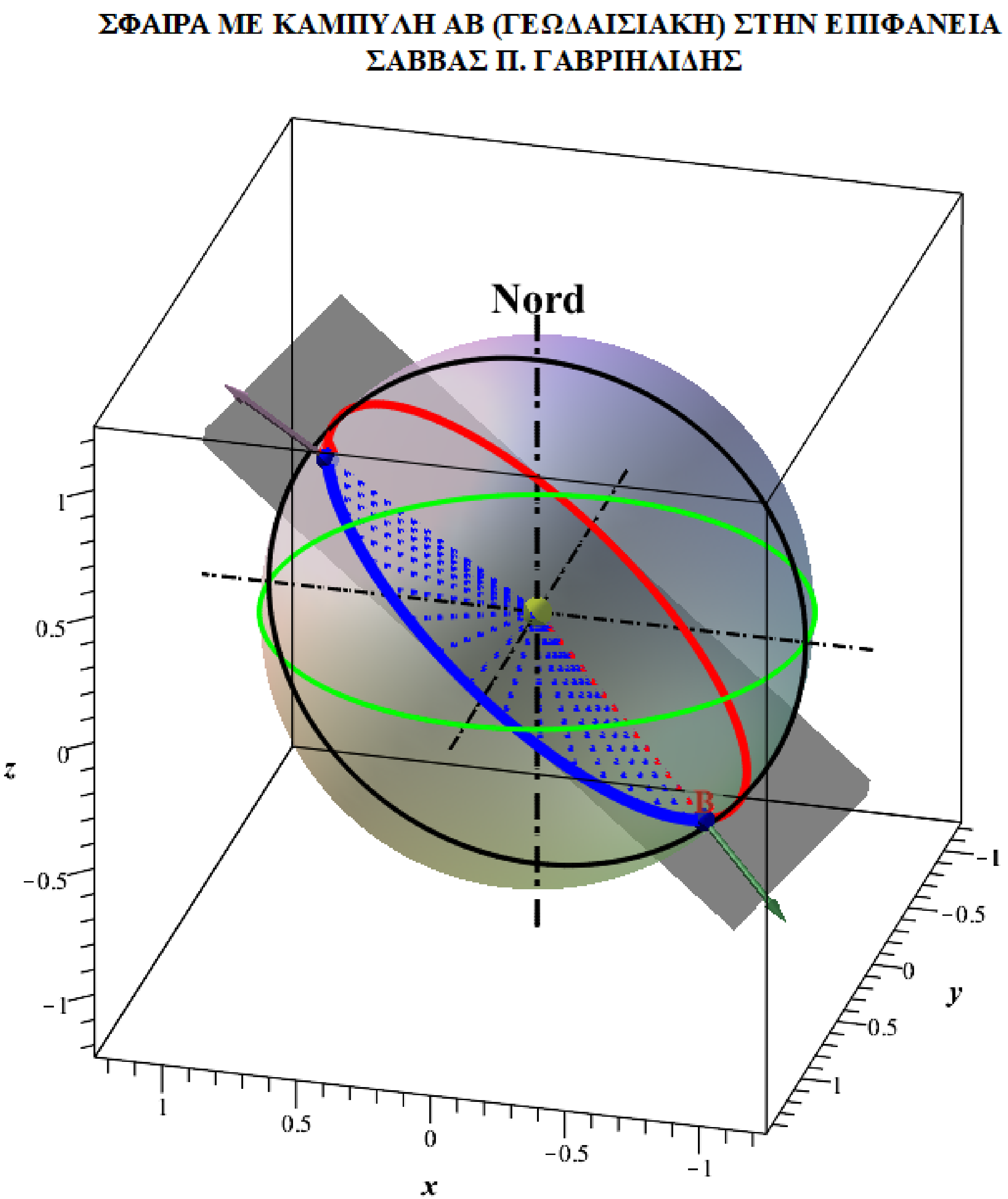
$$0.9999999998 \tag{49}$$

> $BNs\_ := evalf\left(subs\left(\{\theta=\theta B, \phi=\phi B\}, \frac{(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}{Norm(diff(r\_,\theta)\times diff(r\_,\phi))}\right)\right)$

$$\overrightarrow{BNs} := 0.7278237713\,\hat{i}-0.3998667618\,\hat{j}+0.5571168008\,\hat{k} \tag{50}$$

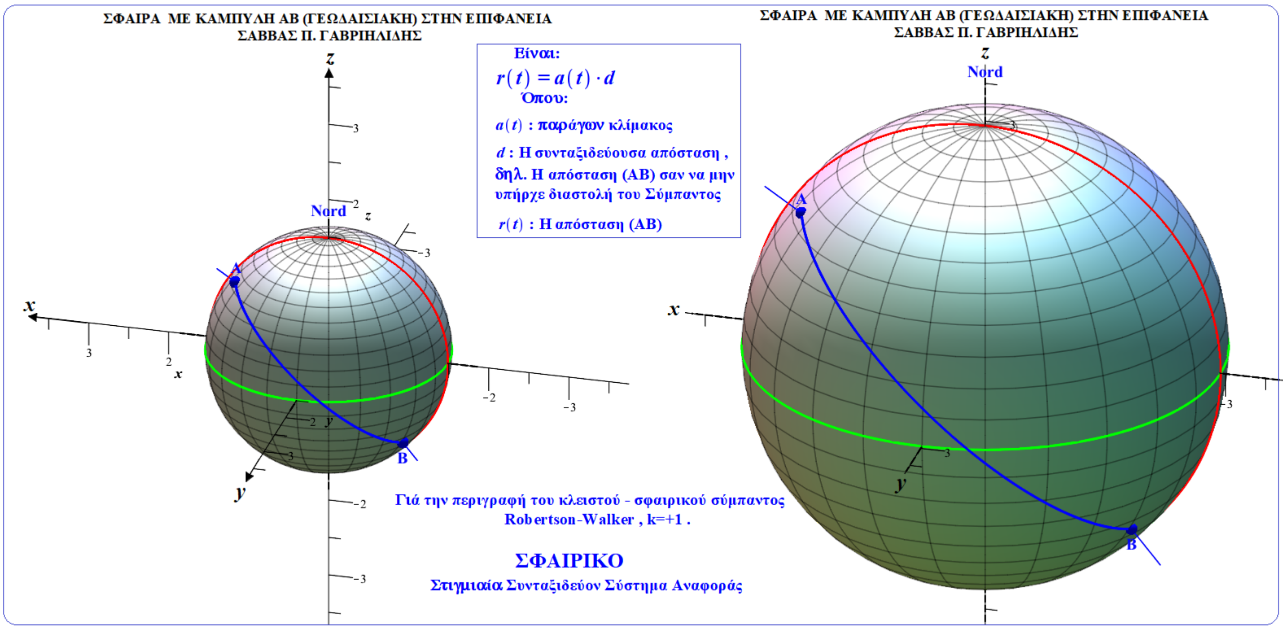
```
> Norm((50))
                                 0.9999999995                                    (51)
>
> EPIPEDOAB := implicitplot3d((27), x = -1 ..1, y = -1 ..1, z = -1 ..1, style = surface,
      transparency = 0.50, color = black) :
> PointA := pointplot3d(A, symbol = solidcircle, symbolsize = 15 , color = blue) :
> PointB := pointplot3d(B, symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = red) :
> SFAIRA := plot3d(Hrb, θ = -Pi/2 ..Pi/2, ϕ = 0 ..2·Pi, style = surface, transparency = 0.50) :
> SFAIRA - GH := plot3d(Hrb, θ = -Pi/2 ..Pi/2, ϕ = 0 ..2·Pi, transparency = 0.00) :
> AKSONAS := spacecurve([0, 0, λ·(R + 0.25·R)], λ = -1 ..1, thickness = 3, linestyle = 4,
      color = black) :
> NORD := textplot3d([0, 0, (R + 0.25·R), "Nord"], font = [arial, bold, 20], color = black) :
> AKSONASXX := spacecurve([λ·(R + 0.25·R), 0, 0], λ = -1 ..1, thickness = 2, linestyle = 4,
      color = black) :
> AKSONASYY := spacecurve([0, λ·(R + 0.25·R), 0], λ = -1 ..1, thickness = 2, linestyle = 4,
      color = black) :
> GEVDAISIAKHAB := spacecurve([X, Y, Z], ϕ = 0 ..2·Pi, thickness = 5, color = RED) :
> ASHMEIO := textplot3d([A[1], A[2], A[3] + 0.075, "A"], font = [arial, bold, 16], color
      = red) :
> BSHMEIO := textplot3d([B[1], B[2], B[3] + 0.075, "B"], font = [arial, bold, 16], color
      = red) :
> CENTRE := pointplot3d([0, 0, 0], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = yellow) :
> ABTOKSO := spacecurve([X, Y, Z], ϕ = ϕA ..ϕB, thickness = 7, color
      = blue) :
> OARAYON := spacecurve([λ·A[1], λ·A[2], λ·A[3]], λ = 0 ..1, linestyle = 2, thickness = 3,
      color = blue) :
> OBRAYON := spacecurve([λ·B[1], λ·B[2], λ·B[3]], λ = 0 ..1, linestyle = 2, thickness = 3,
      color = red) :
> EQUATEUR := spacecurve([subs(θ = 0, Hrb)], ϕ = 0 ..2·Pi, color = green, thickness = 3) :
> MERIDIEN := spacecurve([subs(ϕ = 0, Hrb)], θ = 0 ..2·Pi, color = black, thickness = 3) :
> AVERTICAL := arrow(⟨A[1], A[2], A[3]⟩, -0.5·⟨Component((48), 1), Component((48),
      2), Component((48), 3)⟩) :
> BVERTICAL := arrow(⟨B[1], B[2], B[3]⟩, -0.5·⟨Component((50), 1), Component((50),
      2), Component((50), 3)⟩) :
>
> animA := animate(pointplot3d, [[X, Y, Z], symbol = solidcircle, symbolsize = 15 , color
      = blue], ϕ = ϕA ..ϕB, frames = 18) :
> animRayonOA := animate(spacecurve, [[λ·X, λ·Y, λ·Z], λ = 0 ..1, linestyle = 2, thickness
      = 3, color = blue], ϕ = ϕA ..ϕB, frames = 18, trace = 18) :
> animAVERTICAL := animate(arrow, [⟨X, Y, Z⟩, -0.5·⟨Component((47), 1), Component(
      (47), 2), Component((47), 3)⟩], ϕ = ϕA ..ϕB, frames = 18) :
>
> display(EPIPEDOAB, PointA, PointB, SFAIRA, AKSONAS, AKSONASXX, AKSONASYY,
```

NORD, GEVDAISIAKHAB, ASHMEIO, BSHMEIO, CENTRE, ABTOKSO, OARAYON, OBRAYON, EQUATEUR, MERIDIEN, AVERTICAL, BVERTICAL, animA, animRayonOA, animAVERTICAL, title
= "ΣΦΑΙΡΑ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΑΒ (ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ) ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ \nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", *titlefont* = [*arial*, *bold*, 14], *orientation* = [105, 65, 0], *labels* = [*x*, *y*, *z*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *scaling* = *constrained*) :



> *display*(*EPIPEDOAB*, *PointA*, *PointB*, *SFAIRA* − *GH*, *AKSONAS*, *AKSONASXX*, *AKSONASYY*, *NORD*, *GEVDAISIAKHAB*, *ASHMEIO*, *BSHMEIO*, *CENTRE*, *ABTOKSO*, *OARAYON*, *OBRAYON*, *EQUATEUR*, *MERIDIEN*, *AVERTICAL*, *BVERTICAL*, *animA*, *animRayonOA*, *animAVERTICAL*, *title*
= "ΣΦΑΙΡΑ-ΓΗ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΑΒ (ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ) ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ \nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", *titlefont* = [*arial*, *bold*, 14], *orientation* = [105, 65, 0], *labels* = [*x*, *y*, *z*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *scaling* = *constrained*) :

>



>

Σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας

Παραμετρικές εξισώσεις :

$$x = \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)$$
$$y = \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$$
$$z = \sin(\theta)$$

όπου : θ =Γεωγραφικό πλάτος
φ=Γεωγραφικό μήκος

Επίπεδο διερχόμενο από το κέντρο της Σφαίρας

$$z = a \cdot x + b \cdot y$$

Η Τομή Σφαίρας- Επιπέδου επαληθεύει την σχέση

$$\sin(\theta) = a \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) + b \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi) \Rightarrow$$
$$\boldsymbol{\tan(\theta) = a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi) \Rightarrow}$$
$$\boldsymbol{\theta = \tan^{-1}(a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi))}$$

3-Σφαίρα ακτίνας r · (Υπερεπιφάνεια -Hypersurface)

$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$

Παραμετρικές εξισώσεις :

$x = r \cdot \sin(\chi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)$

$y = r \cdot \sin(\chi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi)$

$z = r \cdot \sin(\chi) \cdot \sin(\theta)$

$w = r \cdot \cos(\chi)$

όπου :θ=Γεωγραφικό πλάτος
φ=Γεωγραφικό μήκος

Επαλήθευση :

$simplify(subs(\{x = r \cdot \sin(\chi) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi), y = r \cdot \sin(\chi) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi), z = r \cdot \sin(\chi) \cdot \sin(\theta), w = r \cdot \cos(\chi)\}, lhs(x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2))) = r^2$

>

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΑΣΤΟΛΗ .

Έστω $R = 1$, η ακτίνα του κλειστού-σφαιρικού ΣΥΜΠΑΝΤΟΣ κατά τον χρόνο της Μεγάλης Έκρηξης .

>

> $Rd := 1 + (1 - \cos(\Theta))$

$$Rd := 2 - \cos(\Theta) \quad (52)$$

> $rd\_ := Rd \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) \cdot \_i + Rd \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\phi) \cdot \_j + Rd \cdot \sin(\theta) \cdot \_k$

$$\overrightarrow{rd} := \hat{i}\,(-\cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\Theta) + 2\cos(\theta)\cos(\phi)) + \hat{j}\,(-\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\Theta) + 2\cos(\theta)\sin(\phi)) + \hat{k}\,(-\sin(\theta)\cos(\Theta) + 2\sin(\theta)) \quad (53)$$

> $Hrbd := [Component(rd\_, 1), Component(rd\_, 2), Component(rd\_, 3)]$

$$Hrbd := [-\cos(\theta)\cos(\phi)\cos(\Theta) + 2\cos(\theta)\cos(\phi), -\cos(\theta)\sin(\phi)\cos(\Theta) + 2\cos(\theta)\sin(\phi), -\sin(\theta)\cos(\Theta) + 2\sin(\theta)] \quad (54)$$

> $\boldsymbol{Nd := [0, 0, Rd]}$

$$Nd := [0, 0, 2 - \cos(\Theta)] \quad (55)$$

> $\boldsymbol{Ad} := evalf(subs(\{\theta = \theta A, \phi = \phi A\}, Hrbd))$

$$Ad := [-0.7038181218\cos(\Theta) + 1.407636244, -0.2872507189\cos(\Theta) + 0.5745014378, -0.6497130720\cos(\Theta) + 1.299426144] \quad (56)$$

> $\boldsymbol{Bd} := evalf(subs(\{\theta = \theta B, \phi = \phi B\}, Hrbd))$

$$Bd := [0.7278237717\cos(\Theta) - 1.455647543, -0.3998667620\cos(\Theta) + 0.7997335240, 0.5571168010\cos(\Theta) - 1.114233602] \quad (57)$$

> $rAd\_ := Ad[1] \cdot \_i + Ad[2] \cdot \_j + Ad[3] \cdot \_k$

$$\overrightarrow{rAd} := (-0.7038181218\cos(\Theta) + 1.407636244)\,\hat{i} + (-0.2872507189\cos(\Theta) + 0.5745014378)\,\hat{j} + (-0.6497130720\cos(\Theta) + 1.299426144)\,\hat{k} \quad (58)$$

> $rBd\_ := Bd[1] \cdot \_i + Bd[2] \cdot \_j + Bd[3] \cdot \_k$

$$\overrightarrow{rBd} := (0.7278237717\cos(\Theta) - 1.455647543)\,\hat{i} + (-0.3998667620\cos(\Theta) + 0.7997335240)\,\hat{j} + (0.5571168010\cos(\Theta) - 1.114233602)\,\hat{k} \quad (59)$$

> $EEPIPED := evalf((rAd\_ \times rBd\_).(x \cdot \_i + y \cdot \_j + z \cdot \_k) = 0)$

$$EEPIPED := -1.679323454\,x - 0.4198308639\cos(\Theta)^2 x + 1.679323455\cos(\Theta)\,x - 0.323070872\,y + 0.323070872\cos(\Theta)\,y - 0.0807677181\cos(\Theta)^2 y + 1.962005501\,z + 0.4905013751\cos(\Theta)^2 z - 1.962005500\cos(\Theta)\,z = 0. \quad \textbf{(60)}$$

> $simplify(isolate(\mathbf{(60)}, z), symbolic)$

$$z = \big((0.8396617278\,x + 0.1615354362\,y)\cos(\Theta)^2 + (-3.35864691\,x - 0.646141744\,y)\cos(\Theta) + 3.358646908\,x + 0.646141744\,y\big) \big/ \big(0.9810027502\cos(\Theta)^2 - 3.924011\cos(\Theta) + 3.924011002\big) \quad \textbf{(61)}$$

> $EPIPEDO := lhs(\mathbf{(61)}) - rhs(\mathbf{(61)})$

$$EPIPEDO := z - \big((0.8396617278\,x + 0.1615354362\,y)\cos(\Theta)^2 + (-3.35864691\,x - 0.646141744\,y)\cos(\Theta) + 3.358646908\,x + 0.646141744\,y\big) \big/ \big(0.9810027502\cos(\Theta)^2 - 3.924011\cos(\Theta) + 3.924011002\big) \quad \textbf{(62)}$$

>

> $a := coeff(rhs(\mathbf{(61)}), x)$

$$a := \frac{0.8396617278\cos(\Theta)^2 - 3.35864691\cos(\Theta) + 3.358646908}{0.9810027502\cos(\Theta)^2 - 3.924011\cos(\Theta) + 3.924011002} \quad \textbf{(63)}$$

> $b := coeff(rhs(\mathbf{(61)}), y)$

$$b := \frac{0.1615354362\cos(\Theta)^2 - 0.646141744\cos(\Theta) + 0.646141744}{0.9810027502\cos(\Theta)^2 - 3.924011\cos(\Theta) + 3.924011002} \quad \textbf{(64)}$$

>

Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης **(Μέγιστος κύκλος)**
τομής Σφαίρας με Επίπεδο $z = a \cdot x + b \cdot y$ διερχόμενο από το κέντρο της Σφαίρας

$$x = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi))^2}} \cdot \cos(\phi)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi))^2}} \cdot \sin(\phi)$$

$$z = \frac{a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi)}{\sqrt{1^2 + (a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi))^2}}$$

> $Xd := Rd \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + (a \cdot \cos(\phi) + b \cdot \sin(\phi))^2}} \cdot \cos(\phi)$

$$Xd := \big((2 - \cos(\Theta))\cos(\phi)\big) \Big/ \Bigg(1 + \Bigg(\frac{(0.8396617278\cos(\Theta)^2 - 3.35864691\cos(\Theta) + 3.358646908)\cos(\phi)}{0.9810027502\cos(\Theta)^2 - 3.924011\cos(\Theta) + 3.924011002} \quad \textbf{(65)}$$

$$+\frac{\left(0.1615354362\cos(\Theta)^2-0.646141744\cos(\Theta)+0.646141744\right)\sin(\phi)}{0.9810027502\cos(\Theta)^2-3.924011\cos(\Theta)+3.924011002}\Bigg)^2\Bigg)^{1/2}$$

> $Yd := Rd\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}\cdot\sin(\phi)$

$$Yd := \big((2-\cos(\Theta))\sin(\phi)\big)\Bigg/\Bigg(1+\Bigg(\frac{\left(0.8396617278\cos(\Theta)^2-3.35864691\cos(\Theta)+3.358646908\right)\cos(\phi)}{0.9810027502\cos(\Theta)^2-3.924011\cos(\Theta)+3.924011002}+\frac{\left(0.1615354362\cos(\Theta)^2-0.646141744\cos(\Theta)+0.646141744\right)\sin(\phi)}{0.9810027502\cos(\Theta)^2-3.924011\cos(\Theta)+3.924011002}\Bigg)^2\Bigg)^{1/2} \quad \textbf{(66)}$$

> $Zd := Rd\cdot\frac{(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))}{\sqrt{1^2+(a\cdot\cos(\phi)+b\cdot\sin(\phi))^2}}$

$$Zd := \Bigg((2-\cos(\Theta))\Bigg(\frac{\left(0.8396617278\cos(\Theta)^2-3.35864691\cos(\Theta)+3.358646908\right)\cos(\phi)}{0.9810027502\cos(\Theta)^2-3.924011\cos(\Theta)+3.924011002}+\frac{\left(0.1615354362\cos(\Theta)^2-0.646141744\cos(\Theta)+0.646141744\right)\sin(\phi)}{0.9810027502\cos(\Theta)^2-3.924011\cos(\Theta)+3.924011002}\Bigg)\Bigg)\Bigg/\Bigg(1+\Bigg(\frac{\left(0.8396617278\cos(\Theta)^2-3.35864691\cos(\Theta)+3.358646908\right)\cos(\phi)}{0.9810027502\cos(\Theta)^2-3.924011\cos(\Theta)+3.924011002}+\frac{\left(0.1615354362\cos(\Theta)^2-0.646141744\cos(\Theta)+0.646141744\right)\sin(\phi)}{0.9810027502\cos(\Theta)^2-3.924011\cos(\Theta)+3.924011002}\Bigg)^2\Bigg)^{1/2} \quad \textbf{(67)}$$

>

> $animRayonOAd := animate(spacecurve, [[\lambda\cdot Ad[1], \lambda\cdot Ad[2], \lambda\cdot Ad[3]], \boldsymbol{\lambda = 0..1.2}, linestyle = 1, thickness = 1, color = blue], \Theta = 0..2\cdot\mathrm{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $animRayonOBd := animate(spacecurve, [[\lambda\cdot Bd[1], \lambda\cdot Bd[2], \lambda\cdot Bd[3]], \boldsymbol{\lambda = 0..1.2}, linestyle$

$= 1, thickness = 1, color = blue], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $EQUATEURSd := simplify(subs(\theta = 0, Hrbd))$

$$EQUATEURSd := [-\cos(\phi)\ (\cos(\Theta) - 2), -\sin(\phi)\ (\cos(\Theta) - 2), 0] \qquad \textbf{(68)}$$

> $MERIDIENSd := simplify(subs(\phi = 0, Hrbd))$

$$MERIDIENSd := [-\cos(\theta)\ (\cos(\Theta) - 2), 0, -\sin(\theta)\ (\cos(\Theta) - 2)] \qquad \textbf{(69)}$$

> $animEQUATEURSd := animate(spacecurve, [[EQUATEURSd[1], EQUATEURSd[2], EQUATEURSd[3]], \phi = 0 ..2\cdot\text{Pi}, thickness = 3, color = green], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $animMERIDIENSd := animate(spacecurve, [[MERIDIENSd[1], MERIDIENSd[2], MERIDIENSd[3]], \theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, thickness = 3, color = red], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

>

> $animNd := animate(textplot3d, [[Nd[1], Nd[2], Nd[3] + 0.25\cdot Rd$, "Nord", $font = [arial, bold, 16], color = blue]], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $animAdSHMEIO := animate(textplot3d, [[Ad[1], Ad[2], Ad[3] + 0.2$, "A", $font = [arial, bold, 16], color = blue]], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $animBdSHMEIO := animate(textplot3d, [[Bd[1], Bd[2], Bd[3] - 0.2$, "B", $font = [arial, bold, 16], color = blue]], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

>

> $XanimAKSONASd := animate(spacecurve, [[\lambda\cdot(Rd + 0.25\cdot Rd), 0, 0, \lambda = -1 ..1], thickness = 2, linestyle = 3, color = black], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $YanimAKSONASd := animate(spacecurve, [[0, \lambda\cdot(Rd + 0.25\cdot Rd), 0, \lambda = -1 ..1], thickness = 2, linestyle = 3, color = black], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $ZanimAKSONASd := animate(spacecurve, [[0, 0, \lambda\cdot(Rd + 0.25\cdot Rd), \lambda = -1 ..1], thickness = 2, linestyle = 3, color = black], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $animSFAIRAS := animate\left(plot3d, \left[Hrbd, \theta = -\frac{\text{Pi}}{2} .. \frac{\text{Pi}}{2}, \phi = 0 ..2\cdot\text{Pi}, transparency = 0.0\right], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0\right)$:

> $animAd := animate(pointplot3d, [Ad, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = blue], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

> $animBd := animate(pointplot3d, [Bd, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = blue], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0)$:

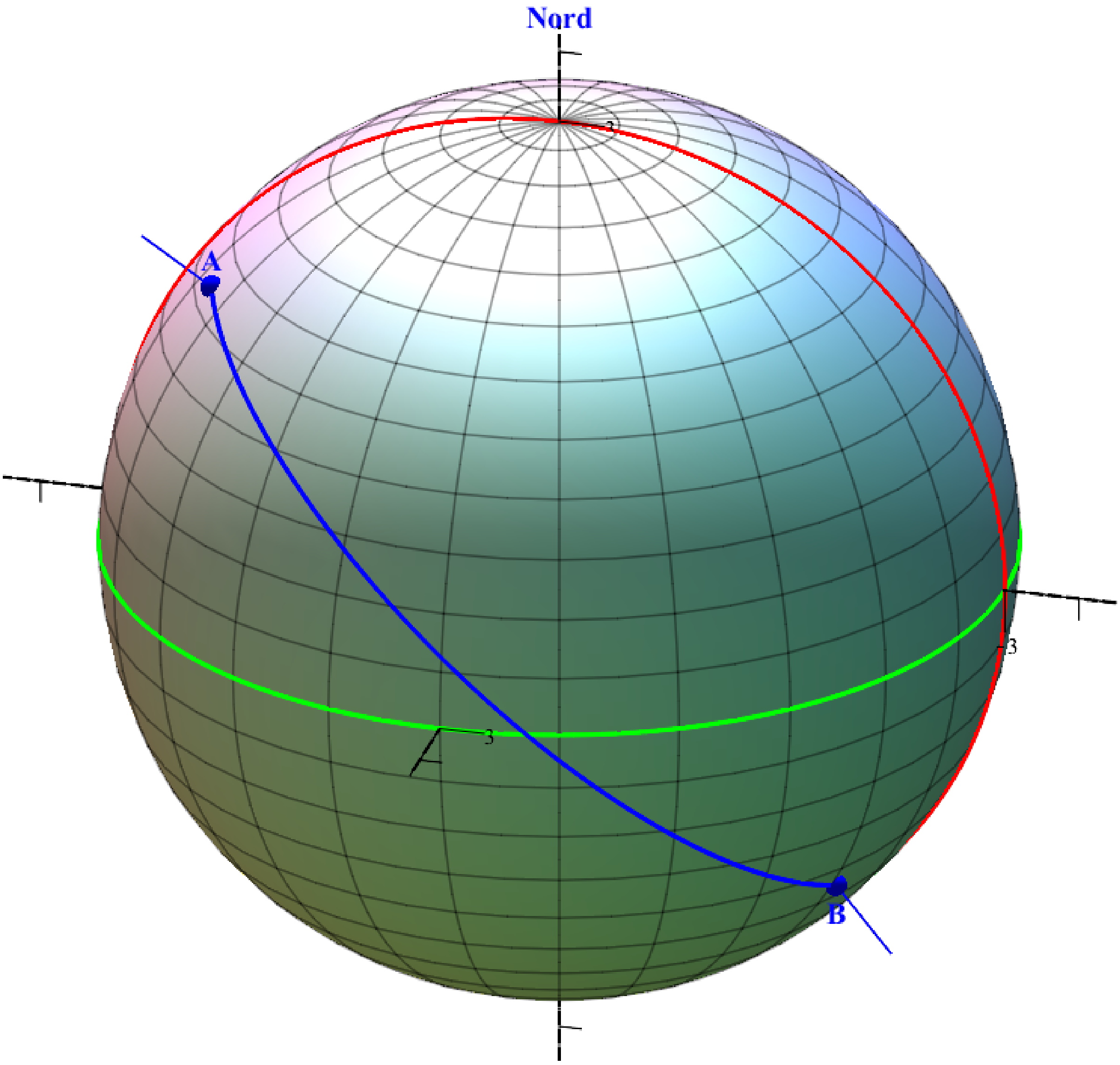
> $animABTOKSO := animate\left(spacecurve, \left[[Xd, Yd, Zd], \phi = \phi A ..\phi B, thickness = 3, color = blue\right], \Theta = 0 ..2\cdot\text{Pi}, frames = 80, trace = 0\right)$:

>

> $display(animRayonOAd, animRayonOBd, animEQUATEURSd, animMERIDIENSd, animNd, animAdSHMEIO, animBdSHMEIO, XanimAKSONASd, YanimAKSONASd, ZanimAKSONASd, animSFAIRAS, animAd, animBd, animABTOKSO, title$ = "ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΕΓΑΛΗ ΕΚΡΗΞΗ ΣΤΗΝ ΜΕΓΑΛΗ ΣΥΝΘΛΙΨΗ\nΣΦΑΙΡΑ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΑΒ (ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ) ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ \nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", $titlefont = [arial, bold, 14], orientation = [105, 65, 0], labels = [x, y, z], labelfont = [arial, bold, 14], scaling = constrained, axes = normal, lightmodel = light2)$:

>

ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΕΓΑΛΗ ΕΚΡΗΞΗ ΣΤΗΝ ΜΕΓΑΛΗ ΣΥΝΘΛΙΨΗ
ΣΦΑΙΡΑ ΜΕ ΚΑΜΠΥΛΗ ΑΒ (ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΚΗ) ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



>
>
>