> with(plots) :
> with(RealDomain) :

ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

$$x(n+1) = \lambda \cdot x(n) \cdot (1 - x(n)) \text{ , } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ , } 0 \leq \lambda \leq 4$$

Η εντολή *rsolve* δίνει λύσεις ΜΟΝΟ γιά $\lambda = 2$ και $\lambda=4$.!

$rsolve(\{x(n+1) = subs(\lambda = 2, \lambda \cdot x(n) \cdot (1 - x(n))), x(0) = A\}, x)$ $\quad -\frac{(-2A+1)^{2^n}}{2} + \frac{1}{2}$

$rsolve(\{x(n+1) = subs(\lambda = 4, \lambda \cdot x(n) \cdot (1 - x(n))), x(0) = A\}, x)$ $\quad -\frac{\cosh(\operatorname{arccosh}(-2A+1)\, 2^n)}{2} + \frac{1}{2}$

$rsolve(\{x(n+1) = subs(\lambda = 1, \lambda \cdot x(n) \cdot (1 - x(n))), x(0) = A\}, x)$ $\quad rsolve(\{x(0) = A, x(n+1) = x(n)\,(1 - x(n))\}, x)$

Μη Γραμμική Δ.Ε. ΔΕΝ Λύνεται με τον γνωστό τρόπο . Αριθμητική Επίλυση .!!!!

Σταθερά Σημεία Περιόδου 1 : $x(n+1) = x(n)$
Σταθερά Σημεία Περιόδου 2 : $x(n+2) = x(n)$
Σταθερά Σημεία Περιόδου 3 : $x(n+3) = x(n)$
....
Σταθερά Σημεία Περιόδου Ν : $x(n+N) = x(n)$

Είναι τα σημεία τομής της κάθε καμπύλης με την διχοτόμο $y = x$

>

δ=Αριθμός του Feigenbaum=4.6692...

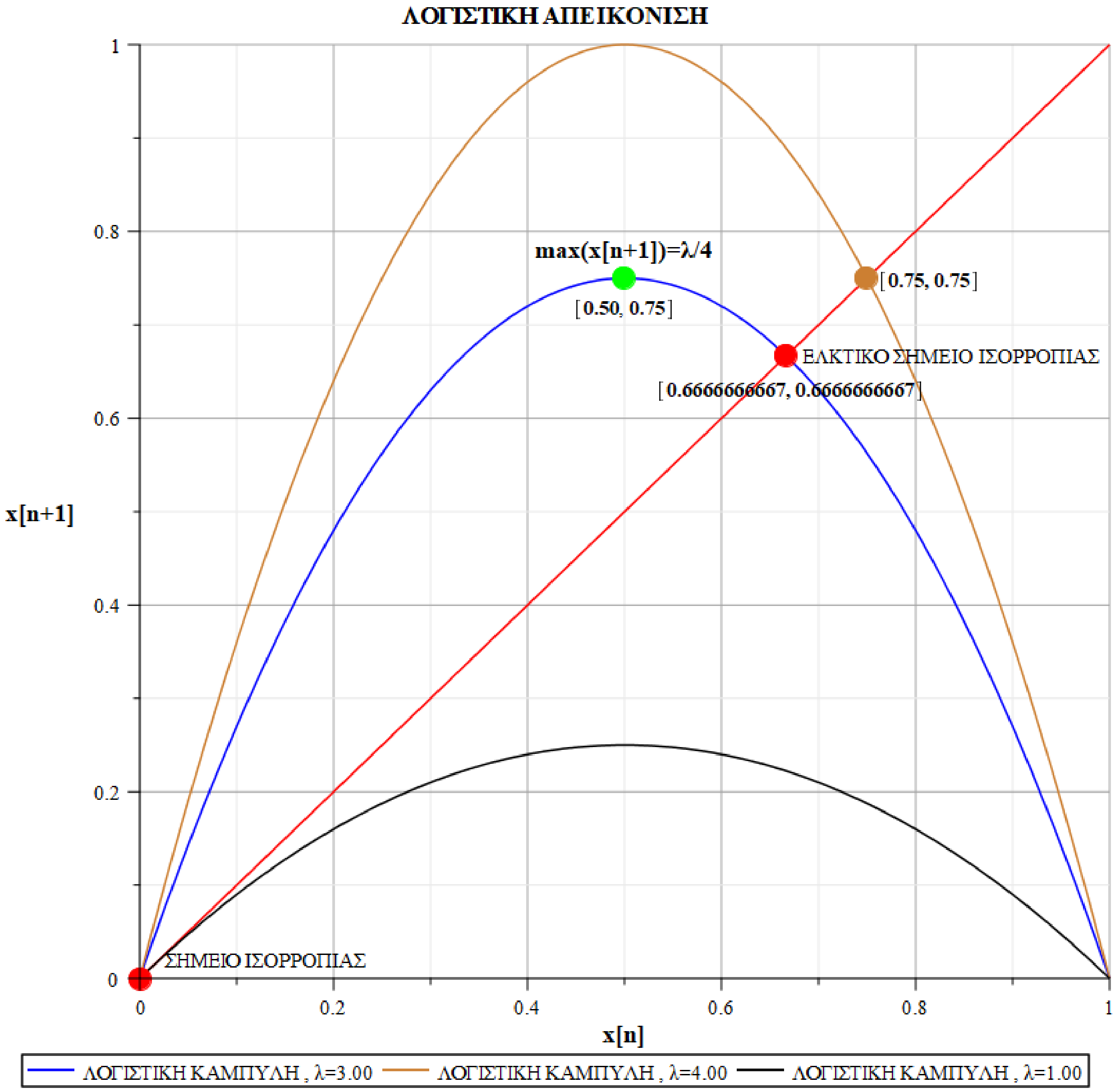
$$\delta_n := \frac{(\lambda[n] - \lambda[n-1])}{\lambda[n+1] - \lambda[n]} :$$

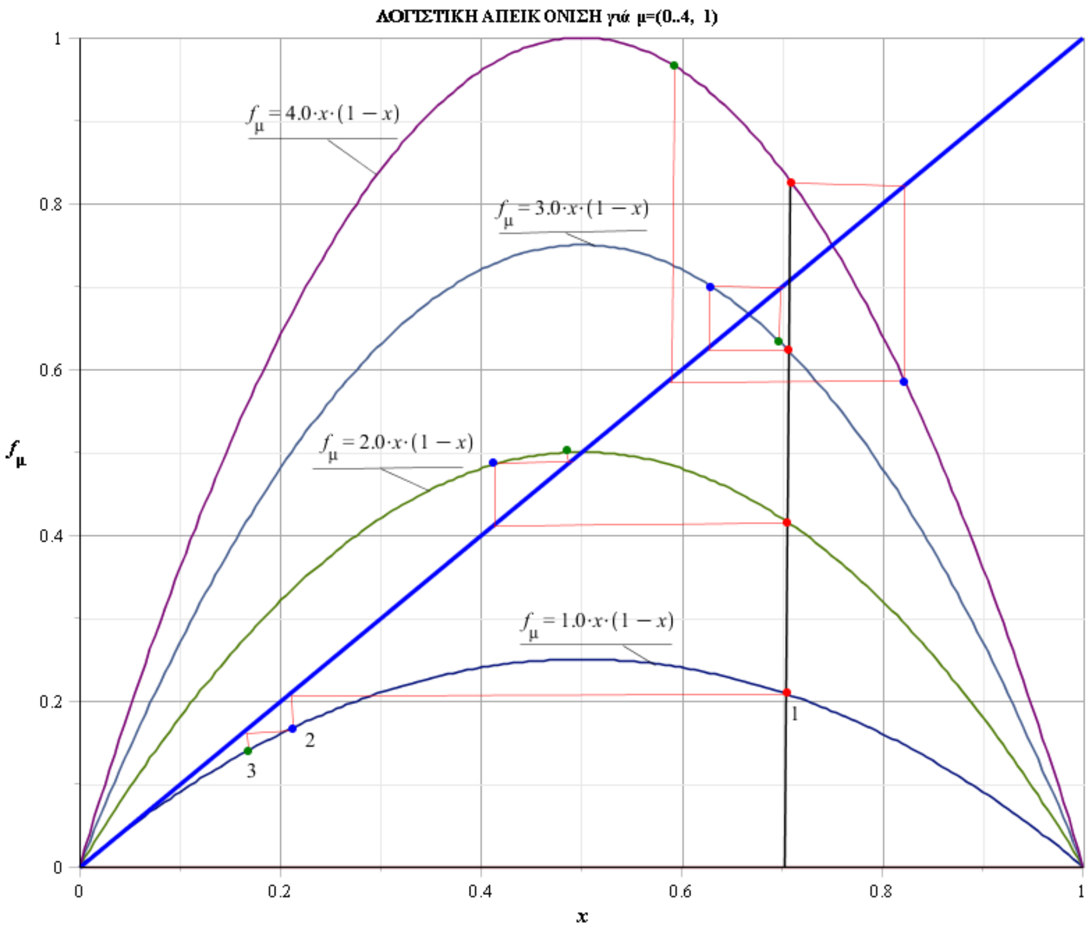
>

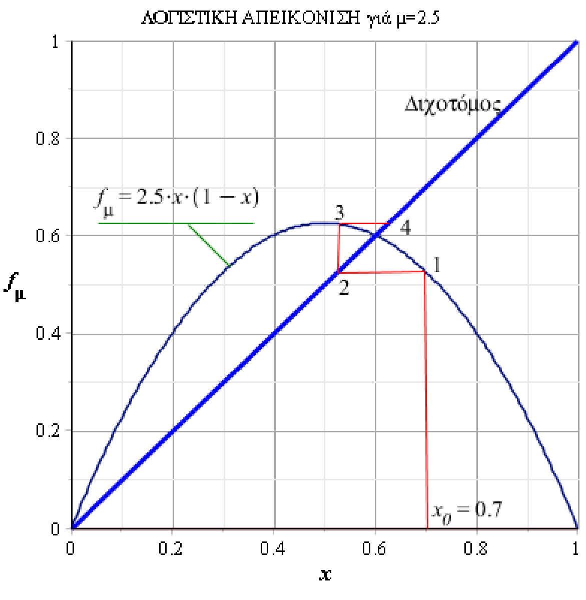
$$solve\left(diff\left(\lambda \cdot x \cdot (1-x), x\right) = 0, x\right) \qquad \frac{1}{2} \qquad \textbf{(1)}$$

$$maxX := subs\left(x = \textbf{(1)}, \lambda \cdot x \cdot (1-x)\right) \qquad maxX := \frac{\lambda}{4} \qquad \textbf{(2)}$$

>







Με την Επαναληπτική σχέση της Λογιστικής Απεικόνισης : $T[i+1] := \mu \cdot T[i] \cdot (1 - T[i])$
Ξεκινώντας από Αρχική Δεδομένη τιμή $T[0]$ βρίσκουμε τις Συντεταγμένες των σημείων 1.2.3.4....
Η Αρχική Τετμημένη Μετασχηματίζεται διαδοχικά σε Τεταγμένη του 1=Τεταγμένη του 2=Τετμημένη του 2=Τετμημένη του 3
Και η διαδικασία Επαναλαμβάνεται .

ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ - ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

$$x(n+1) = \lambda \cdot x(n) \cdot (1 - x(n)) \;,\; n = 0, 1, 2, \ldots \;,\; 0 \le \lambda \le 4$$

Μη Γραμμική Δ.Ε. ΔΕΝ Λύνεται με τον γνωστό τρόπο . Αριθμητική Επίλυση .!!!!

> $x[0] := X$:

> $nmax := 20$:

> $halfnmax := \frac{nmax}{2}$:

> **for** i **from** 0 **to** $nmax$ **do**: $x[i+1] := \lambda \cdot x[i] \cdot (1 - x[i])$:**od**:

> $x[1]$

$$\lambda X (1 - X) \tag{1}$$

> $x[2]$

$$\lambda^2 X (1 - X) (1 - \lambda X (1 - X)) \tag{2}$$

> $x[3]$

$$\lambda^3 X (1 - X) (1 - \lambda X (1 - X)) (1 - \lambda^2 X (1 - X) (1 - \lambda X (1 - X))) \tag{3}$$

> $x[4]$

$$\lambda^4 X (1 - X) (1 - \lambda X (1 - X)) (1 - \lambda^2 X (1 - X) (1 - \lambda X (1 - X))) (1 - \lambda^3 X (1 - X) (1 - \lambda X (1 - X)) (1 - \lambda^2 X (1 - X) (1 - \lambda X (1 - X)))) \tag{4}$$

>

$evalf(1 + \sqrt{6}) = 3.449489743$

Οι πρώτες διακλαδώσεις συμβαίνουν γιά κρίσιμες τιμές του λ :

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \;, \lambda_3 = 1 + \sqrt{6} = 3.449489743 \;, \lambda_\infty \approx 3.569945 .$

>

Σταθερά Σημεία Περιόδου 1 : $x(n+1) = x(n)$

Εάν: 1<λ ⇒ Εμφανίζονται δύο (2) Σταθερά Σημεία Περιόδου 1 στο διάστημα x∈[0,1] .

>

> **(1)** $= X$

$$\lambda X (1 - X) = X \tag{5}$$

> $solve($**(5)**$, X)$

$$0, \frac{\lambda - 1}{\lambda} \tag{6}$$

> $subs(\lambda = 3.82842712, lhs($**(5)**$) - rhs($**(5)**$))$

$$3.82842712\, X (1 - X) - X \tag{7}$$

> $STATHERASHMEIA1 := solve($**(7)**$, X)$

(8)

$$STATHERASHMEIA1 := 0., 0.7387961247 \quad \textbf{(8)}$$

>

Σταθερά Σημεία Περιόδου 2 : $x(n+2)=x(n)$

Εάν: 1<λ≤3 ⇒ Εμφανίζονται δύο (2) Σταθερά Σημεία Περιόδου 2 στο διάστημα x∈[0,1]
Εάν: 3<λ ⇒ Εμφανίζονται τέσσερα (4) Σταθερά Σημεία Περιόδου 2 στο διάστημα x∈[0,1]

>

> (2) = X

$$\lambda^2 X(1-X)\,(1-\lambda X(1-X))=X \quad \textbf{(9)}$$

> solve((9), X)

$$0, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda+1+\sqrt{\lambda^2-2\lambda-3}}{2\lambda}, -\frac{-\lambda-1+\sqrt{\lambda^2-2\lambda-3}}{2\lambda} \quad \textbf{(10)}$$

> x[1, λ] := (10)[1]

$$x_{1,\lambda} := 0 \quad \textbf{(11)}$$

> x[2, λ] := (10)[2]

$$x_{2,\lambda} := \frac{\lambda-1}{\lambda} \quad \textbf{(12)}$$

> x[3, λ] := subs(λ^2 − 2λ − 3 = factor(λ^2 − 2·λ − 3), simplify((10)[3]))

$$x_{3,\lambda} := \frac{\lambda+1+\sqrt{(\lambda+1)\,(\lambda-3)}}{2\lambda} \quad \textbf{(13)}$$

> x[4, λ] := subs(λ^2 − 2λ − 3 = factor(λ^2 − 2·λ − 3), simplify((10)[4]))

$$x_{4,\lambda} := \frac{\lambda+1-\sqrt{(\lambda+1)\,(\lambda-3)}}{2\lambda} \quad \textbf{(14)}$$

>

> subs(λ = 3.82842712, (9))

$$14.65685421\,X(1-X)\,(1-3.82842712\,X(1-X))=X \quad \textbf{(15)}$$

> STATHERASHMEIA2 := solve((15), X)

$$STATHERASHMEIA2 := 0., 0.3693980632, 0.7387961248, 0.8918058120 \quad \textbf{(16)}$$

> lhs((15))

$$14.65685421\,X(1-X)\,(1-3.82842712\,X(1-X)) \quad \textbf{(17)}$$

>

Σταθερά Σημεία Περιόδου 4 : $x(n+4)=x(n)$

Εάν $1<\lambda\leq3$ ⇒ Εμφανίζονται δύο (2) Σταθερά Σημεία Περιόδου 4 στο διάστημα $x\in[0,1]$
Εάν $3<\lambda\leq\lambda_3$ ⇒ Εμφανίζονται τέσσερα (4) Σταθερά Σημεία Περιόδου 4 στο διάστημα $x\in[0,1]$

$$\lambda_3 = 1+\sqrt{6} = 3.449489743$$

Εάν $\lambda_3<\lambda\leq3.960101$ Εμφανίζονται οκτώ (8) Σταθερά Σημεία Περιόδου 4 στο διάστημα $x\in[0,1]$

Εάν $\lambda>3.960101$ Εμφανίζονται δεκαέξη 16) Σταθερά Σημεία Περιόδου 4 στο διάστημα $x\in[0,1]$

> $subs(\lambda = 3.82842712, \mathbf{(4)})$

$$214.8233754\,X(1-X)(1-3.82842712\,X(1-X))(1-14.65685421\,X(1-X)(1-3.82842712\,X(1-X)))(1-56.11269816\,X(1-X)(1-3.82842712\,X(1-X))(1-14.65685421\,X(1-X)(1-3.82842712\,X(1-X)))) \qquad \mathbf{(18)}$$

> $STATHERASHMEIA4 := solve(\mathbf{(18)}=X, X)$

$STATHERASHMEIA4 :=$ 0., 0.2993978753, 0.3693980633, 0.6055154488, 0.7387961248, 0.8030462313, 0.8918058120, 0.9144829486 **(19)**

>

>

Σταθερά Σημεία Περιόδου 3 : $x(n+3) = x(n)$

$$evalf(1+\sqrt{8}) = 3.828427124$$

Εάν $\lambda\leq3.82842712$ ⇒ Εμφανίζονται δύο (2) Σταθερά Σημεία Περιόδου 3 στο διάστημα $x\in[0,1]$
Εάν $\lambda>3.82842712$ ⇒ Εμφανίζονται οκτώ (8) Σταθερά Σημεία Περιόδου 3 στο διάστημα $x\in[0,1]$

> $subs(\lambda = 3.82842712, \mathbf{(3)})$

$$56.11269816\,X(1-X)(1-3.82842712\,X(1-X))(1-14.65685421\,X(1-X)(1-3.82842712\,X(1-X))) \qquad \mathbf{(20)}$$

> $STATHERASHMEIA3 := solve(\mathbf{(20)}=X, X)$

$STATHERASHMEIA3 :=$ 0., 0.7387961248 **(21)**

>

>

ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

>

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΑΡΧΗΣ & ΤΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ ΤΟΜΗΣ ΤΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ & ΟΡΙΖΟΝΤΙΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΜΕ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ & ΔΙΧΟΤΟΜΟ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ .
(Συμβολισμός Συντεταγμένων με XY)

>

1. Γραφικές Επαναλήψεις όταν : λ=3.82842712 και $X[0] = 0.20$:

```
> X[0] := 0.20 :
> Nmax := 100 :
> halfNmax := Nmax/2 :
> for i from 0 to Nmax do: if X[i] ≥ 0 and X[i] ≤ 1.0 then X[i+1] := 3.82842712·X[i]
      ·(1 − X[i]) : fi :od:
> XY[0] := [X[0], 0]
```

$$XY_0 := [0.20, 0] \tag{22}$$

```
> XY[1] := [X[0], X[1]]
```

$$XY_1 := [0.20, 0.6125483392] \tag{23}$$

```
> X[0]
```

$$0.20 \tag{24}$$

```
> X[1]
```

$$0.6125483392 \tag{25}$$

```
> X[2]
```

$$0.9086116010 \tag{26}$$

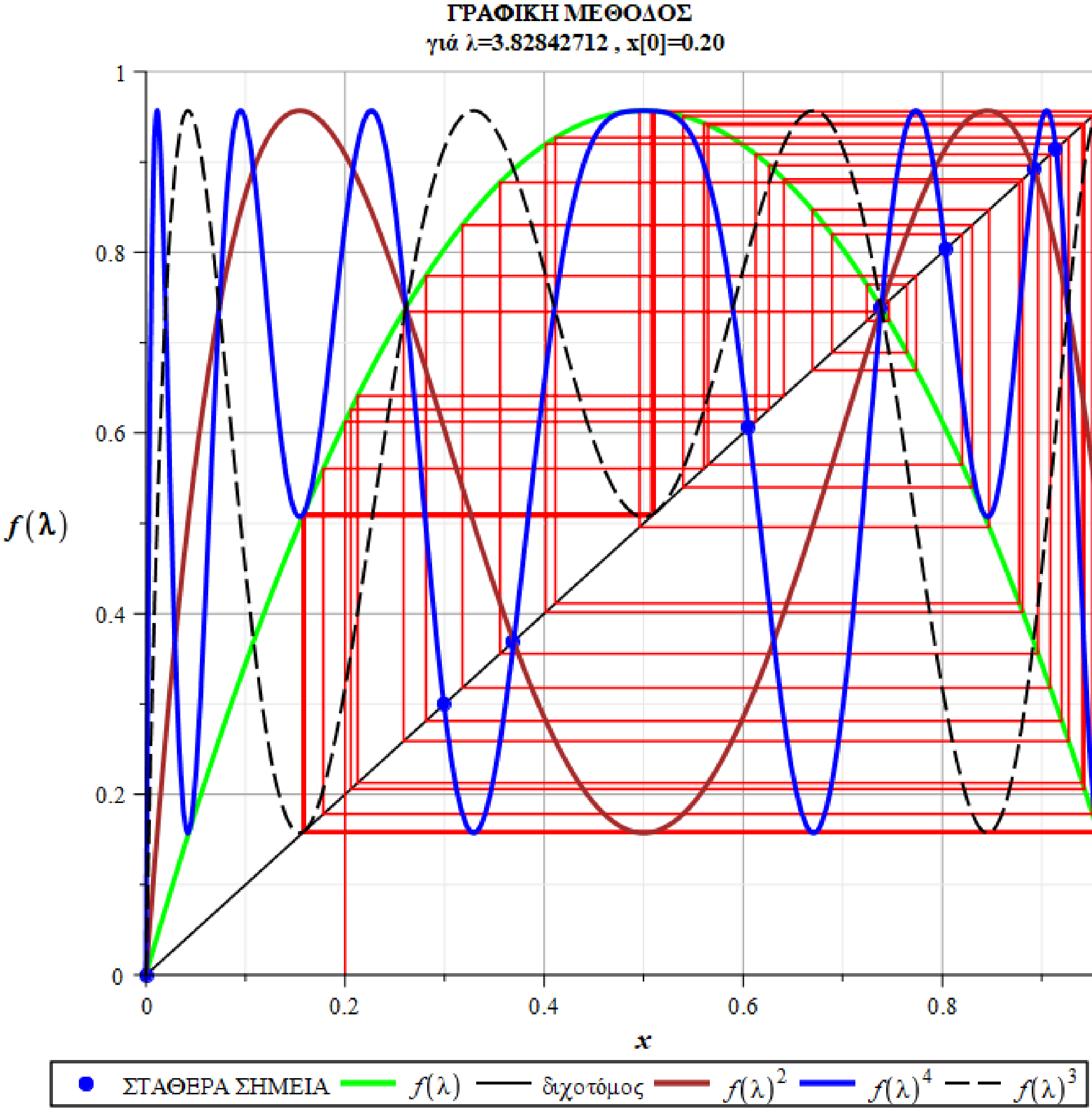
```
> X[3]
```

$$0.3178994165 \tag{27}$$

```
> X[4]
```

$$0.8301537535 \tag{28}$$

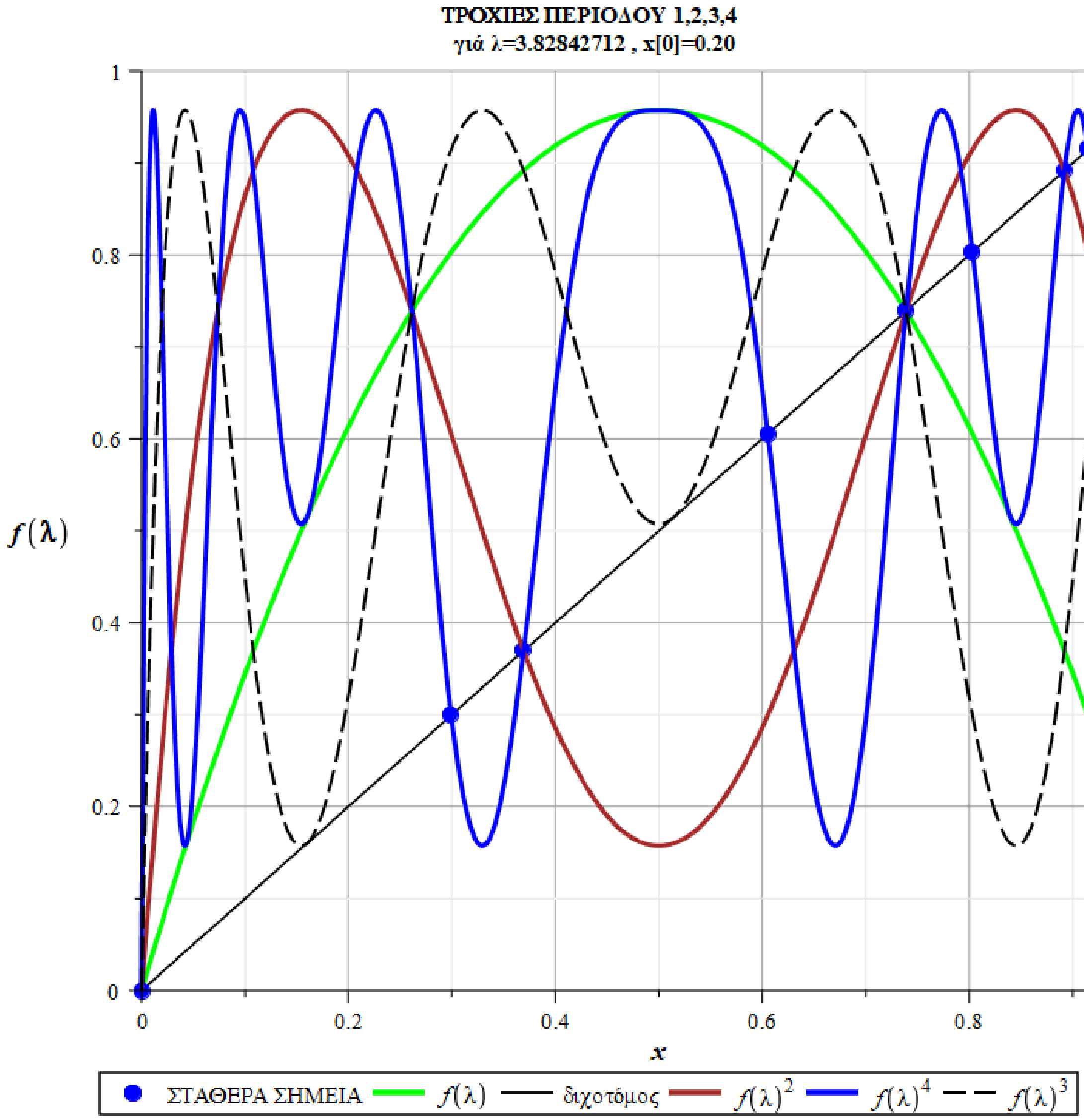
```
>
> for i from 1 to halfNmax do : XY[2·i] := [X[i], X[i]] : XY[2·i + 1] := [X[i], X[i+1]] :
      od:
> seq(XY[n], n = 0 ..Nmax) :
>
> Bissectrice := plot(x, x = 0 ..1, color = black, thickness = 1, legend = "διχοτόμος") :
> Equation := plot(3.82842712·x·(1 − x), x = 0 ..1, color = green, thickness = 3, legend
      = f(λ)) :
> EquationX := plot((17), X = 0 ..1, color = brown, thickness = 3, legend = f^2(λ)) :
> EquationXX := plot((18), X = 0 ..1, color = blue, thickness = 3, legend = f^4(λ)) :
> EquationXXX := plot((20), X = 0 ..1, color = black, thickness = 2, linestyle = 3, legend
      = f^3(λ)) :
> p1 := pointplot([seq(XY[n], n = 0 ..Nmax)], style = line, color = red) :
> p2 := pointplot([seq([(19)[i], (19)[i]], i = 1 ..8)], symbol = solidcircle, symbolsize = 10,
      color = blue, legend = "ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ") :
> display(Equation, Bissectrice, p1, p2, EquationX, EquationXX, EquationXXX, gridlines, labels
      = [x, f(λ)], labelfont = [arial, bold, 14], title
      = "ΓΡΑΦΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ \n γιά λ=3.82842712 , x[0]=0.20", titlefont = [arial, 12, bold])
      :
>
```



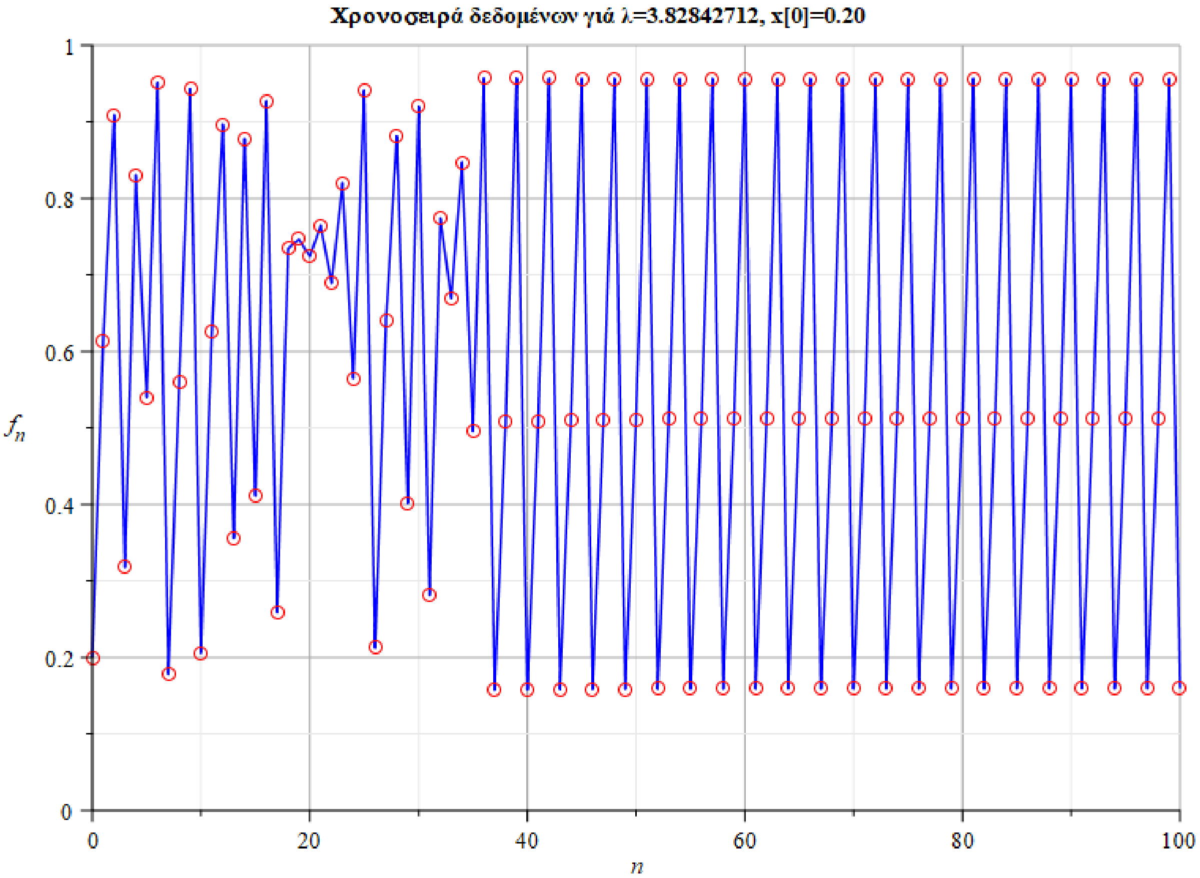
>

> *display*(*Equation*, *Bissectrice*, *p2*, *EquationX*, *EquationXX*, *EquationXXX*, *gridlines*, *labels* = [*x*, *f*(λ)], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "ΤΡΟΧΙΕΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ 1,2,3,4 \n γιά λ=3.82842712 , x[0]=0.20", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*]) :

>




```
>
> S11 := pointplot( {seq( [n, X[n]], n = 0 ..Nmax) }, style = line, color = blue, labels = [n,
      f[n]], title = "Χρονοσειρά δεδομένων γιά λ=3.82842712, x[0]=0.20", titlefont = [arial,
      12, bold] , gridlines) :
> S22 := pointplot( {seq( [n, X[n]], n = 0 ..Nmax) }, color = red, symbol = circle, symbolsize
      = 10, labels = [n, f[n]]) :
> display(S11, S22, view = [default, 0 ..1]) :
>
```



\>

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗΣ (Bifurcation)

\>

\>

\> $imax := 80:$

\> $jmax := 40:$

\> $step := 0.1:$

\> **for** j **from** 0 **to** $jmax$ **do**: $xx[j, 0] := 0.50$:**for** i **from** 0 **to** $imax$ **do**: $xx[j, i+1] := (step \cdot j) \cdot xx[j, i] \cdot (1 - xx[j, i])$:**od**: $ll[j] := [[(step \cdot j), xx[j, n]]\$n = 40 ..imax]$:**od**:

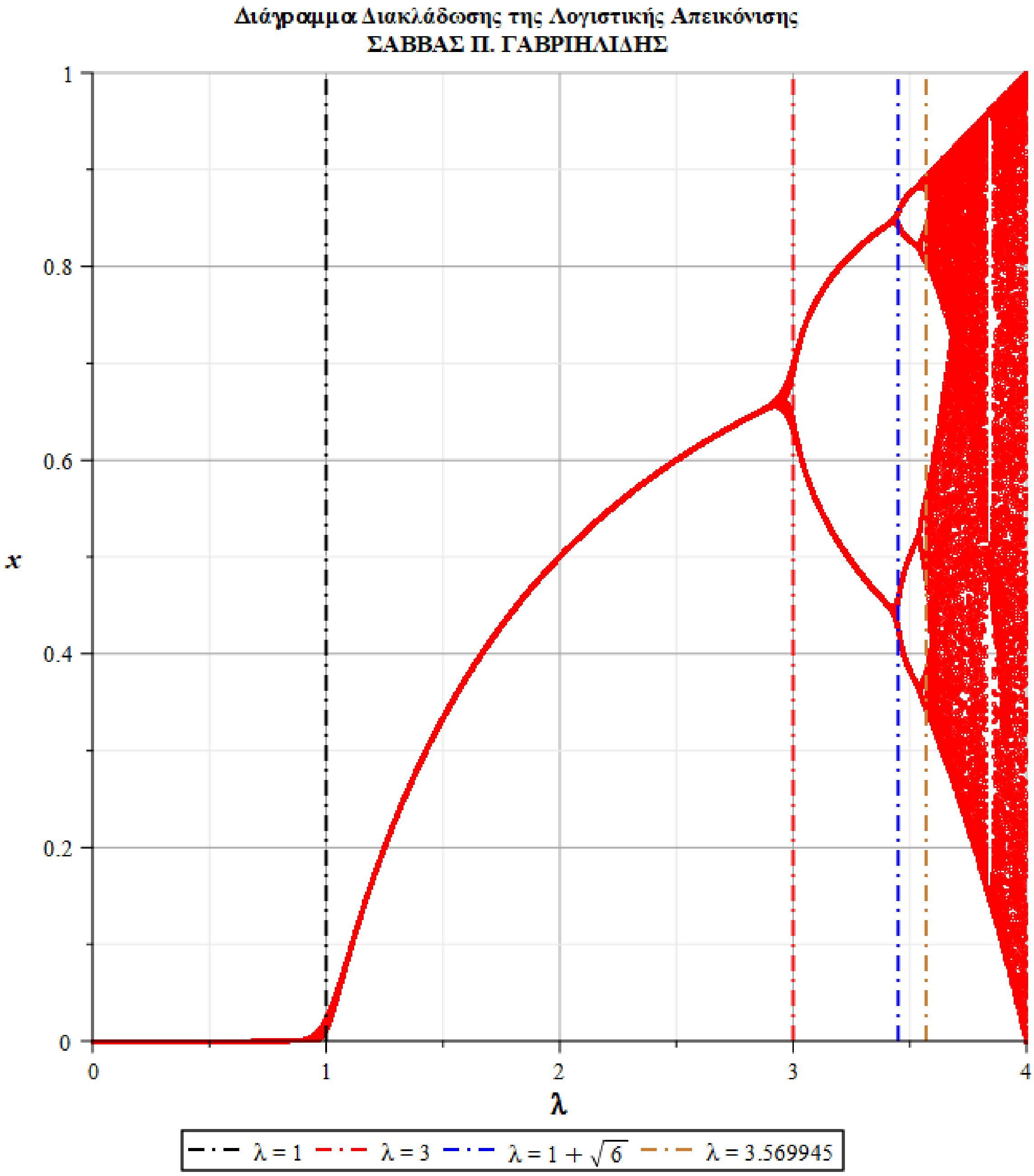
\> $LL := [seq(ll[j], j = 0 ..jmax)]:$

\> $BIF := plot(LL, x = 0 ..4, y = 0 ..1, style = point, symbol = circle, symbolsize = 1, labels = [\lambda, x], labelfont = [arial, bold, 12], color = red):$

\> $S1 := implicitplot\left(\left[x = 1, x = 3, x = 1 + \sqrt{6}, x = 3.569945\right], x = 0 ..4, y = 0 ..1, linestyle = 4, thickness = [2, 2, 2, 2], color = [black, red, blue, gold], legend = \left[\lambda = 1, \lambda = 3, \lambda = 1 + \sqrt{6}, \lambda = 3.569945\right]\right):$

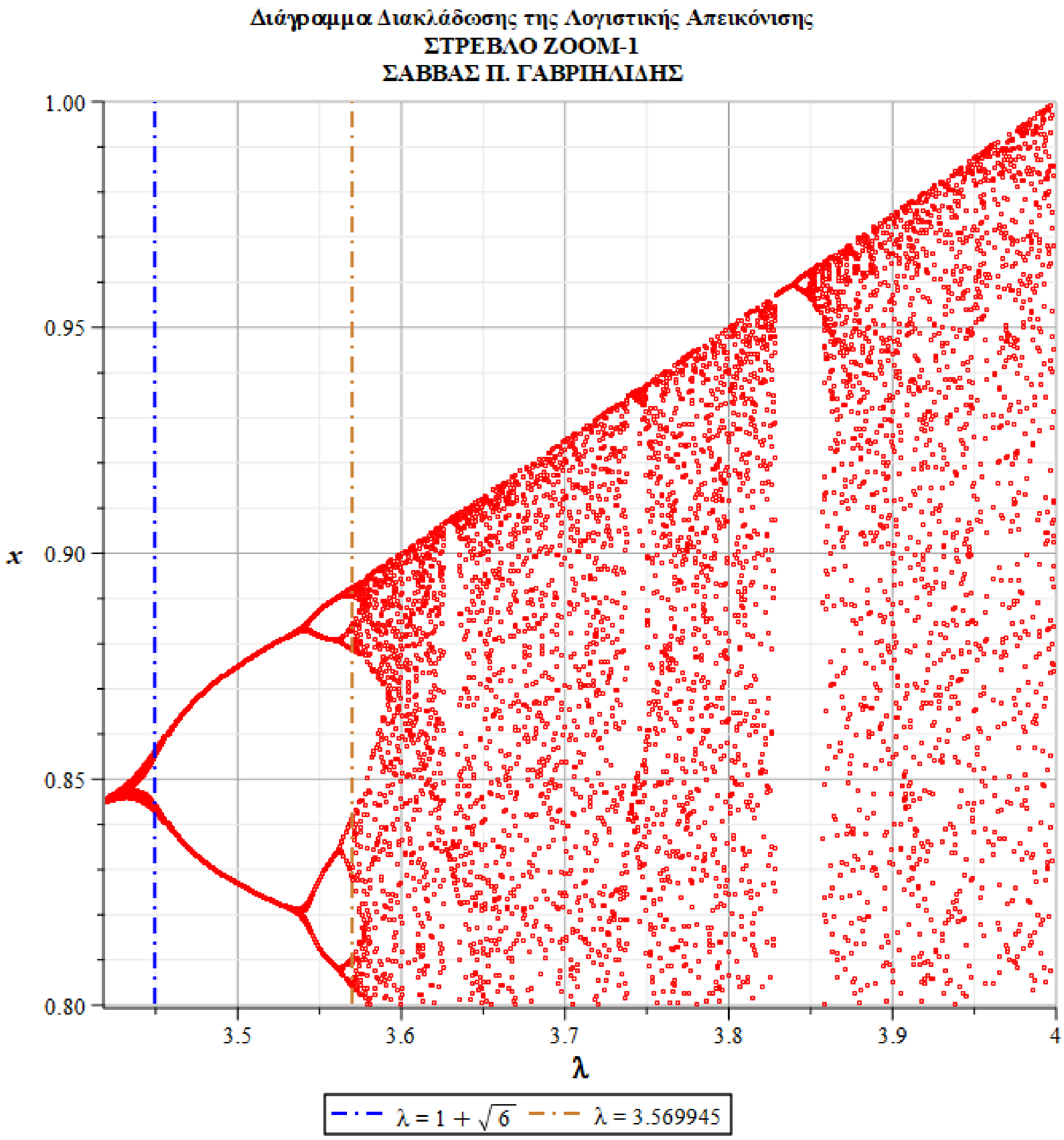
\> $S1zoom := implicitplot\left(\left[x = 1 + \sqrt{6}, x = 3.569945\right], x = 0 ..4, y = 0 ..1, linestyle = 4, thickness = [2, 2], color = [blue, gold], legend = \left[\lambda = 1 + \sqrt{6}, \lambda = 3.569945\right]\right):$

\> $A := display(BIF, S1, labels = [\lambda, x], labelfont = [arial, bold, 14], title$ = "Διάγραμμα Διακλάδωσης της Λογιστικής Απεικόνισης\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", $titlefont = [arial, bold, 12], gridlines):$

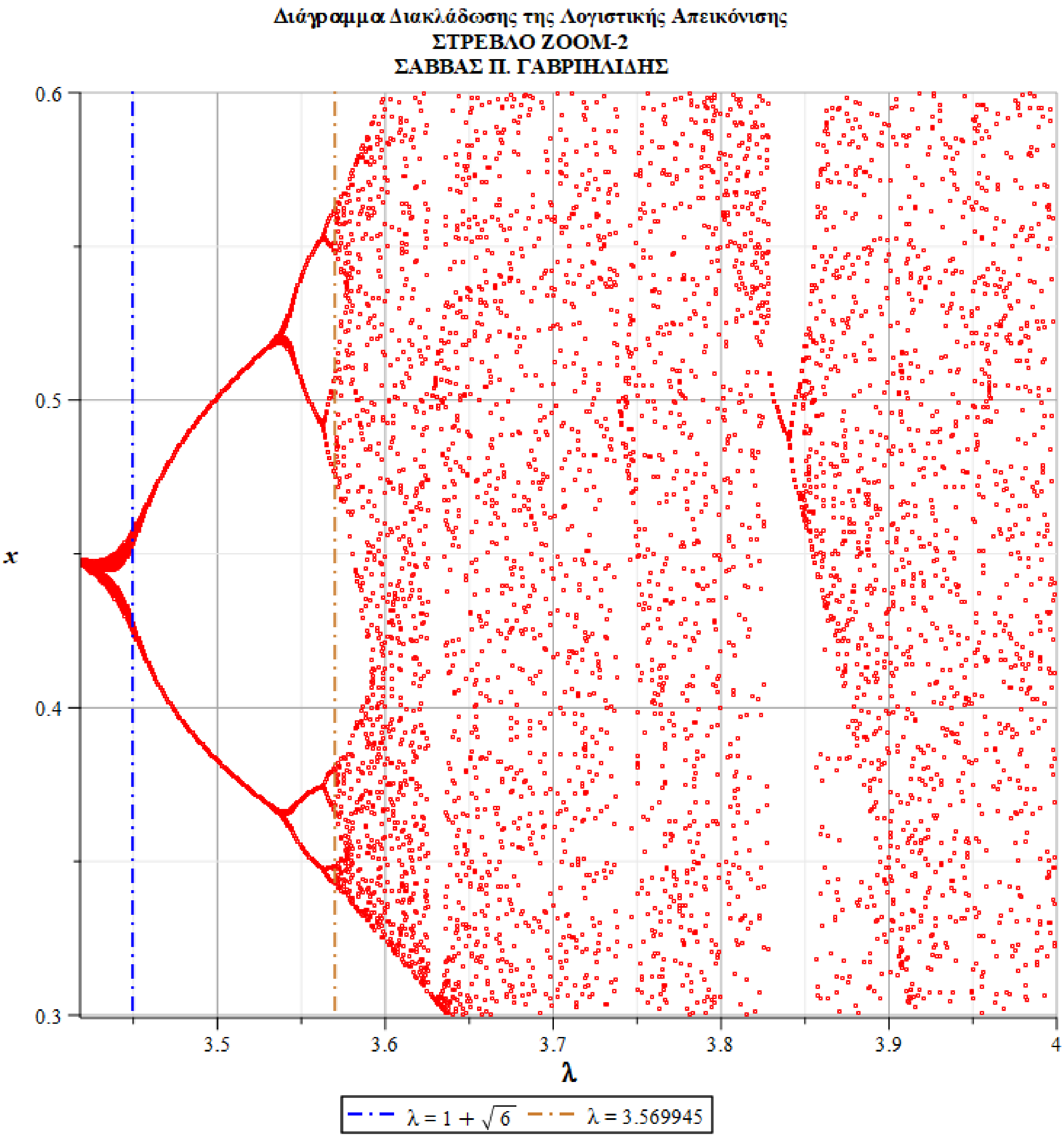


>

> *display*(*BIF*, *S1zoom*, *labels* = [λ, *x*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "Διάγραμμα Διακλάδωσης της Λογιστικής Απεικόνισης\nΣΤΡΕΒΛΟ ZOOM-1\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", *titlefont* = [*arial*, *bold*, 12], *gridlines*, *view* = [3.42 ..4, 0.80 ..1]) :



> *display*(*BIF*, *S1zoom*, *labels* = [λ, *x*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "Διάγραμμα Διακλάδωσης της Λογιστικής Απεικόνισης\nΣΤΡΕΒΛΟ ZOOM-2\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", *titlefont* = [*arial*, *bold*, 12], *gridlines*, *view* = [3.42 ..4, 0.30 ..0.60]) :



\>

\> *display*(*BIF*, *S1zoom*, *labels* = [λ, *x*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "Διάγραμμα Διακλάδωσης της Λογιστικής Απεικόνισης\nΣΤΡΕΒΛΟ ZOOM-3\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", *titlefont* = [*arial*, *bold*, 12], *gridlines*, *view* = [3.42 ..4, *default*]) :

\>

Διάγραμμα Διακλάδωσης της Λογιστικής Απεικόνισης
ΣΤΡΕΒΛΟ ZOOM-3
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ