```
> with(plots) :
> with(Student[VectorCalculus]) :
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
>
```

ΑΚΟΛΟΥΘΩΝΤΑΣ ΤΑ ΒΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ :

ΓΡΑΦΟΥΜΕ ΤΗΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ : $\overrightarrow{r(\theta)} := \langle x(\theta), y(\theta), z(\theta) \rangle$. Έστω Χρόνος t.

ΥΠΟΛΟΓΙΖΟΥΜΕ (ΠΡΩΤΑ) ΤΟ ΜΗΚΟΣ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ sOM : s:=int($\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 + (z'(\theta))^2}$, θ), (που είναι συνάρτηση της παραμέτρου θ.). Έστω Χρόνος t.

Εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{TM} = \left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{ds}{dx}\right)^{-1}, \left(\frac{ds}{dy}\right)^{-1}, \left(\frac{ds}{dz}\right)^{-1} \right\rangle = < \left[\frac{ds}{d\theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{dx}\right)\right]^{-1}, \left[\frac{ds}{d\theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{dy}\right)\right]^{-1}, \left[\frac{ds}{d\theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{dz}\right)\right]^{-1} >=< \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{dx}{d\theta}\right), \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{dy}{d\theta}\right), \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{dz}{d\theta}\right) >$ στο σημείο M(x,y,z) . (Κανόνας Αλυσίδας στην παραγώγιση) .

Ακτίνα καμπυλότητας **R** ,στο σημείο M(x,y,z) (Κανόνας Αλυσίδας στην παραγώγιση): $\frac{d}{ds}\vec{T} = \frac{1}{R} \cdot \vec{N} \Rightarrow \frac{d}{d\theta}\vec{T} \cdot \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1} = \frac{1}{R} \cdot \vec{N} \Rightarrow \left|\frac{d}{d\theta}\vec{T}\right| = \frac{\left|\frac{ds}{d\theta}\right| \cdot 1}{R} \Rightarrow R = \frac{\left|\frac{ds}{d\theta}\right|}{\left|\frac{d}{d\theta}\vec{T}\right|}$.

Καμπυλότητα K , στο Σημείο M(x,y,z) : K=1/R

Κάθετο Μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{NM}$, **στο** Σημείο M(x,y,z) : $\overrightarrow{NM} = R \cdot \frac{d}{ds}\vec{T} = R \cdot \frac{d}{d\theta}\vec{T} \cdot \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^{-1}$

Μοναδιαίο διάνυσμα : $\overrightarrow{BM} = \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

Ταχύτητα : $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{ds}\vec{r} \cdot \frac{d}{dt}s = \vec{T} \cdot \frac{d}{dt}s$

Επιτάχυνση : $\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\vec{T} \cdot \frac{d}{dt}s\right) = \frac{d^2}{dt^2}s \cdot \vec{T} + \frac{d}{dt}s \cdot \frac{d}{dt}\vec{T} = \frac{d^2}{dt^2}s \cdot \vec{T} + \frac{d}{dt}s \cdot \left(\frac{d}{ds}\vec{T} \cdot \frac{d}{dt}s\right) = \frac{d^2}{dt^2}s \cdot \vec{T} + \left(\frac{d}{dt}s\right)^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \vec{N} = \frac{d^2}{dt^2}s \cdot \vec{T} + K\left(\frac{d}{dt}s\right)^2 \cdot \vec{N}$

Επιτάχυνση : $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}s \cdot \vec{T} + K\left(\frac{d}{dt}s\right)^2 \cdot \vec{N} \rightarrow \vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$ όπου : $a_T = \frac{d^2}{dt^2}s = \frac{d}{dt}|\vec{v}|$ και $a_N = K\left(\frac{d}{dt}s\right)^2 = K \cdot |\vec{v}|^2, a_N = \sqrt{|\vec{a}|^2 - a_T^2}$

Στοιχειώδες μήκος καμπύλης της Επιφάνειας :

$$ds := \sqrt{E \cdot (d(u(t)))^2 + 2 \cdot F \cdot d(u(t)) \cdot d(v(t)) + G \cdot (d(v(t)))^2} :$$

Υπολογισμός της παραγώγου του μήκους : $\frac{d}{dt}s$ $\quad diff(s(t), t) = \sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2 \cdot F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2}$:

$$diff(s(t), t) = \sqrt{E \cdot (diff(u(t), t))^2 + 2 \cdot F \cdot diff(u(t), t) \cdot diff(v(t), t) + G \cdot (diff(v(t), t))^2} : \quad (2.191)$$

Γωνία θ εφαπτόμενων σε ένα σημείο $\vec{r}(u, v)$ διανυσμάτων $d\vec{r} = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r} \cdot du + \frac{\partial}{\partial v}\vec{r} \cdot dv$, $\delta\vec{r} = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r} \cdot \delta u + \frac{\partial}{\partial v}\vec{r} \cdot \delta v$ **της Επιφάνειας :**

$$\cos(\theta) = \frac{d\vec{r} . \delta\vec{r}}{|d\vec{r}| \cdot |\delta\vec{r}|} = \frac{E \cdot du \cdot \delta u + F \cdot (du \cdot \delta v + dv \cdot \delta u) + G \cdot dv \cdot \delta v}{\sqrt{E \cdot (du)^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot (dv)^2} \cdot \sqrt{E \cdot (\delta u)^2 + 2 \cdot F \cdot \delta u \cdot \delta v + G \cdot (\delta v)^2}}$$

και τα διανύσματα είναι κάθετα εαν : $E \cdot du \cdot \delta u + F \cdot (du \cdot \delta v + dv \cdot \delta u) + G \cdot dv \cdot \delta v = 0$

Στην περίπτωση των παραμετρικών καμπυλών u, v στο σημείο : $\vec{r}(t)$

$$\cos(\theta) = \frac{F}{\sqrt{E \cdot G}}$$

και οι παραμετρικές είναι ορθογώνιες εάν και μόνον εάν : $F = 0$.

Εμβαδόν Επιφάνειας στοιχειώδες

$$\Delta S := \left| \frac{d\vec{r}}{du} \times \frac{d\vec{r}}{dv} \right| \cdot du \cdot dv = \sqrt{E \cdot G - F^2} \cdot du \cdot dv$$

Υπολογισμός της καμπυλότητας της επιφάνειας στο P .

$$U := \frac{diff(u(t), t)}{diff(s(t), t)} :$$

$$V := \frac{diff(v(t), t)}{diff(s(t), t)} : \quad (2.191)$$

$$K := L \cdot U^2 + 2 \cdot M \cdot U \cdot V + N \cdot V^2 :$$

Τελεστής Σχήματος στο τυχαίο σημείο $p = \vec{r}(u, v) \in M$

$$[S_p] = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{E \cdot G - F^2} \cdot \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι οι ΚΥΡΙΕΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΕΣ k[1],k[2] .

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι οι κύριες κατευθύνσεις των ΚΥΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ .

Η ορίζουσα του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι η Καμπυλότητα Gauss

*Το (1/2)*ίχνος του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι η Μέση Καμπυλότητα*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΩΝ Eigenvectors ,(*a*, *b*, οι προκύψασες συντεταγμένες).

$$LinearAlgebra[Determinant]\left(\begin{bmatrix} b^2 & -a \cdot b & a^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{bmatrix}\right) = 0 :$$

Εάν : $k_1 > k_2$

Τότε : οι καμπυλόγραμμες συντεταγμένες u , v της Επιφάνειας είναι Κύριας Καμπυλότητας Καμπύλες αν και μόνον αν :
$F = 0 , M = 0$

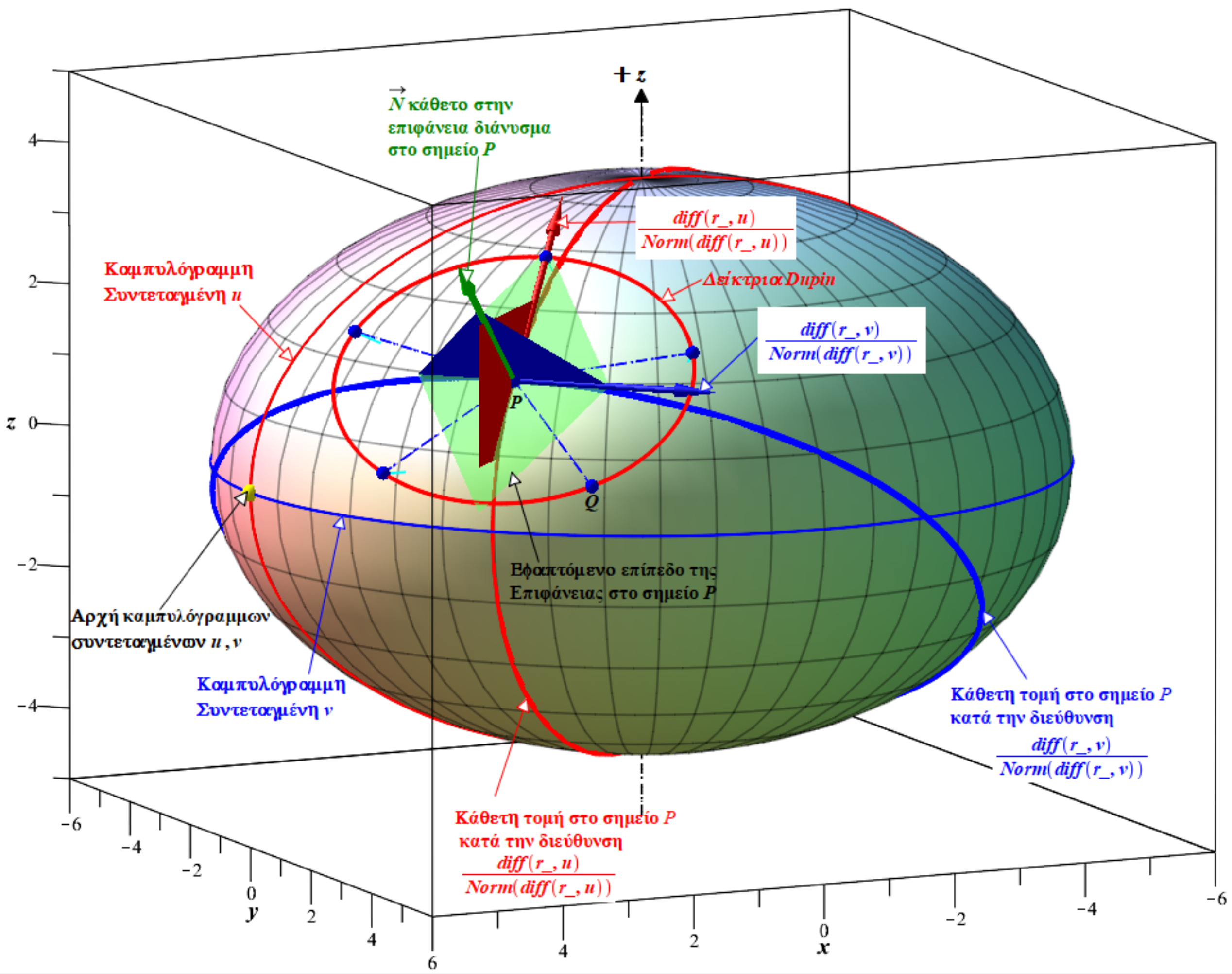
Θεώρημα 1. Σελ. 218 ,ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ .

Σε κάθε σημείο P μιάς επιφάνειας S
υπάρχουν δύο αμοιβαία κάθετες διευθύνσεις ,
που κείνται στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο P ,
γιά τις οποίες η καμπυλότητα K=1/R λαμβάνει την μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή της K_1 και K_2 αντίστοιχα .
Η καμπυλότητα ως προς οποιοδήποτε άλλο επίπεδο Π , το οποίο τέμνει την S και περιέχει το κάθετο σε αυτή διάνυσμα $\vec{n}$ δίδεται από την :

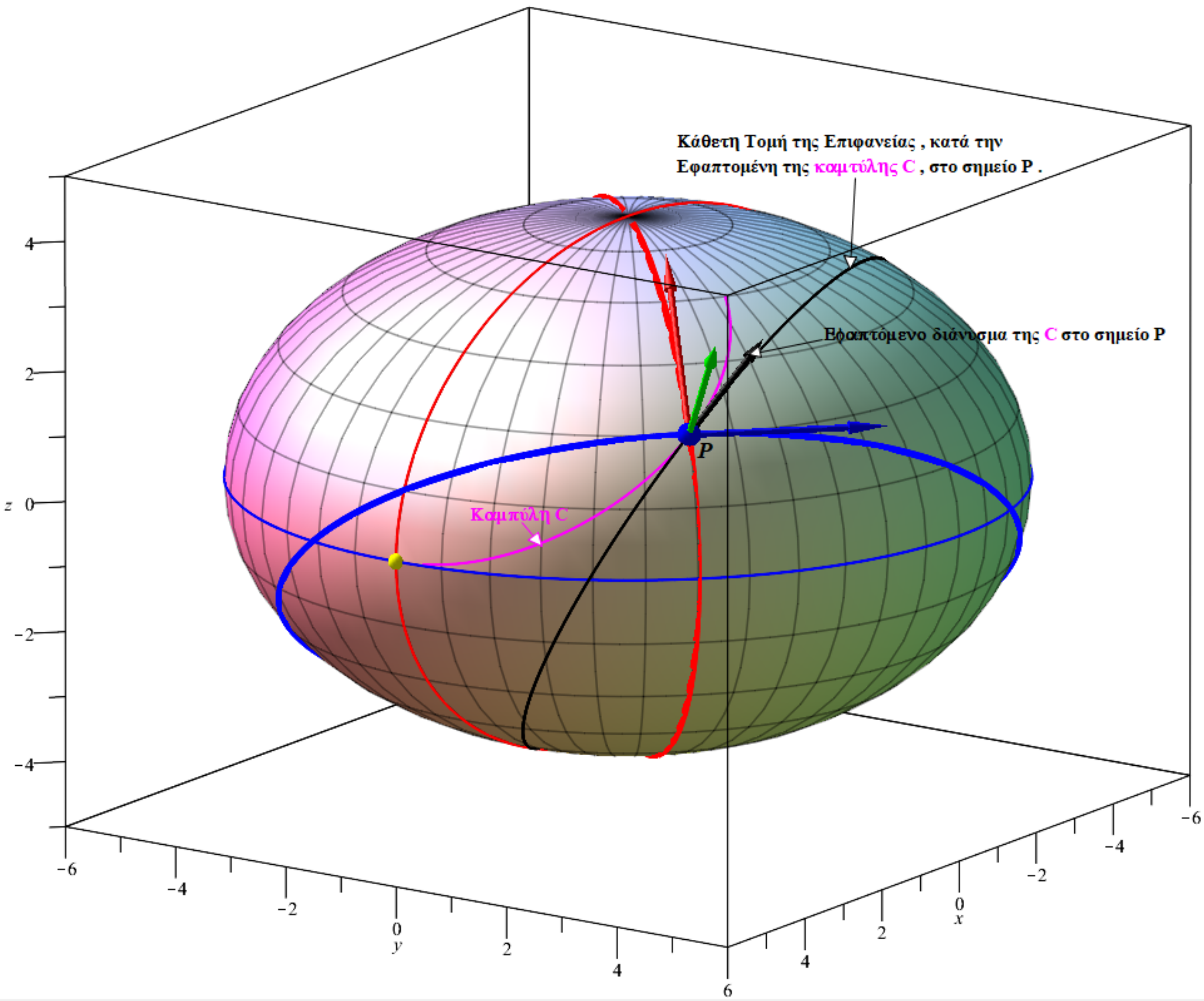
$$K_1[P] \cdot \cos^2(\theta) + K_2[P] \cdot \sin^2(\theta) = K[P](\theta) \quad \textit{Τύπος Euler}$$

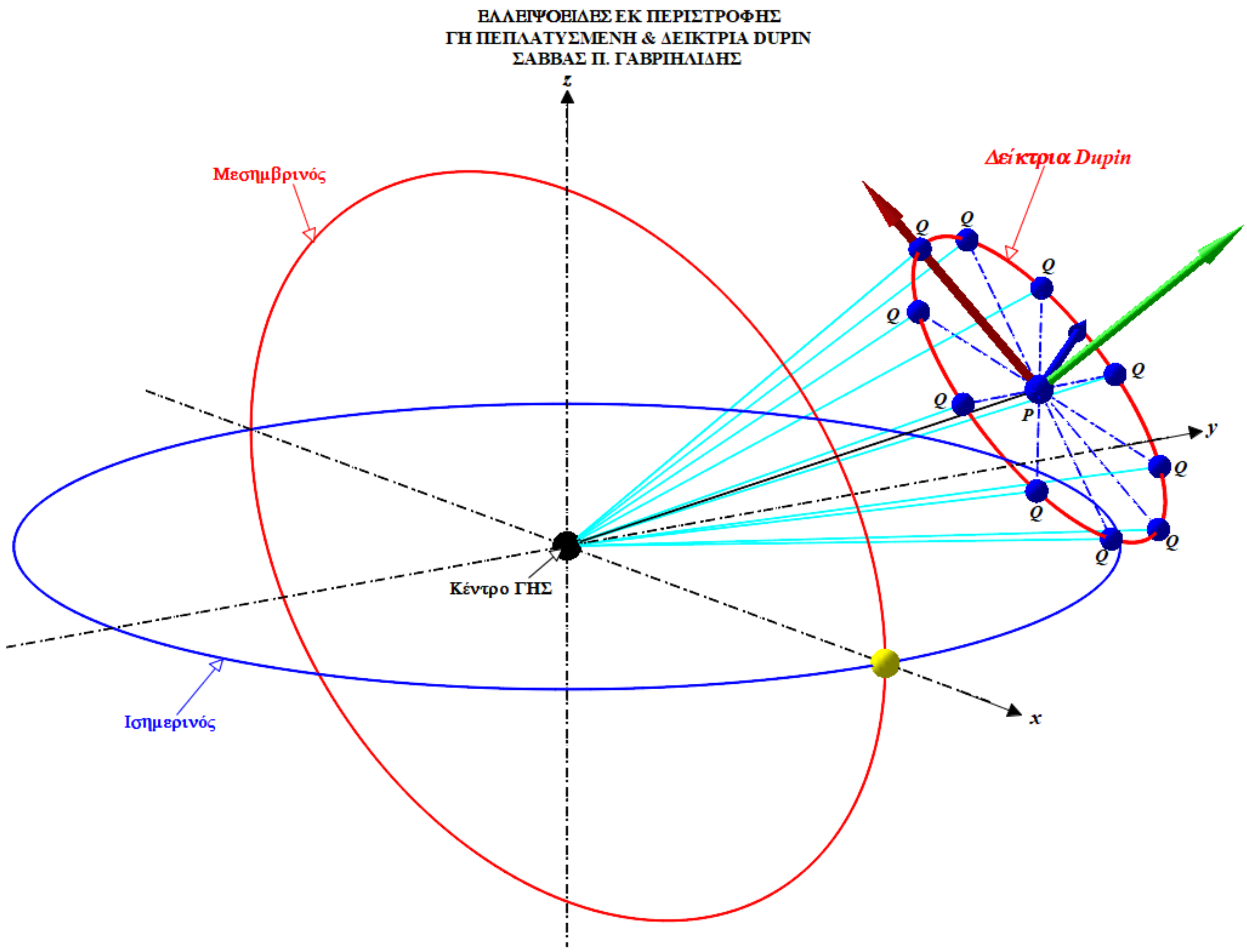
όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο Π με την διεύθυνση της μεγαλύτερης καμπυλότητας .

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ
ΓΗ ΠΕΠΛΑΤΥΣΜΕΝΗ & ΔΕΙΚΤΡΙΑ DUPIN
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ





>

> $A := 6$

$$A := 6 \tag{1}$$

> $B := 4$

$$B := 4 \tag{2}$$

> $a := \frac{\mathrm{Pi}}{6}$:

> $b := \frac{\mathrm{Pi}}{4}$:

> $c := \frac{\mathrm{Pi}}{3}$:

>

ΓΗ Πεπλατισμένη στους Πόλους . Ελλειψοειδές εκ περιστροφής έλλειψης που βρίσκεται στο επίπεδο xOz περί τον άξονα OZ :

> $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{B^2} = 1$:

> $S := [A \cdot \cos(u) \cdot \cos(v), A \cdot \cos(u) \cdot \sin(v), B \cdot \sin(u)]$:

>

>

Μία καμπύλη $(Curve)$ επί της Επιφανείας S και που περνάει από το το σημείο $P(u=a, v=b)$
$t=0$:

$$Curve := subs(\{u=c\cdot t+a, v=b+t\}, S)$$

Όλες οι καμπύλες επί της Επιφανείας που περνούν από το σημείο $P(u=a, v=b)$
και εκεί εφάπτονται στην ίδια ευθεία (που περνά από το $P(u=a, v=b)$)
έχουν την ίδια κάθετη καμπυλότητα=Καμπυλότητα της Επιφάνειας στο σημείο $P(u=a, v=b)$
κατά την διεύθυνση της Εφαπτομένης της καμπύλης στο $P(u=a, v=b)$.

$$Curve := subs(t=v-b, c\cdot t+a) \Rightarrow Curve := c\,(v-b)+a$$
$$\frac{du}{dv} := diff(Curve, v) = c \quad , \quad c := 0..2\cdot\text{Pi}$$

Μία καμπύλη επί του Ελλειψοειδούς και που περνάει από το σημείο $P\left(u=\frac{\text{Pi}}{6}, v=\frac{\text{Pi}}{4}\right)$.

> $Curve := subs(\{u=c\cdot t+a, v=b+t\}, S)$

$$Curve := \left[6\cos\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right), 6\cos\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right), 4\sin\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)\right] \quad (3)$$

> $PCurve := evalf(subs(t=0, Curve))$

$$PCurve := [3.674234614, 3.674234614, 2.000000001] \quad (4)$$

> $u := v \rightarrow c\cdot(v-b)+a$

$$u := v \mapsto c\,(v+(-b))+a \quad (5)$$

> $diff(u(v), v)$

$$\frac{\pi}{3} \quad (6)$$

>

>

Να υπολογισθούν :
1. Τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης E, F, G και δεύτερης L, M, N τάξης της επιφάνειας
2. Το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{N}$ σε κάθε σημείο της Επιφάνειας (απεικόνιση Gauss) .
3. Τον τελεστή σχήματος ,την καμπυλότητα Gauss
4. Την μέση καμπυλότητα
5. Τις κύριες καμπυλότητες

Να υπολογισθούν η παράγωγος του μήκους : $\frac{d}{dt}s$

και η καμπυλότητα της επιφάνειας στο P .

>

> $r\_ := A\cdot\cos(u)\cdot\cos(v)\cdot\_i + A\cdot\cos(u)\cdot\sin(v)\cdot\_j + B\cdot\sin(u)\cdot\_k$

$$\vec{r} := 6\cos(u)\cos(v)\,\hat{i} + 6\cos(u)\sin(v)\,\hat{j} + 4\sin(u)\,\hat{k} \quad (7)$$

> $rP\_ := subs(\{u=a, v=b\}, r\_)$

$$\overrightarrow{rP} := 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{i} + 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{j} + 4\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{k} \tag{8}$$

>

> $S1 := subs(v=b, \langle A\cdot\cos(u)\cdot\cos(v), A\cdot\cos(u)\cdot\sin(v), B\cdot\sin(u)\rangle):$

> $TNBFrame(S1, u)$

$$\left[\begin{array}{c} -\dfrac{3\sin(u)\sqrt{2}}{2\sqrt{-5\cos(u)^2+9}} \\ -\dfrac{3\sin(u)\sqrt{2}}{2\sqrt{-5\cos(u)^2+9}} \\ \dfrac{2\cos(u)}{\sqrt{-5\cos(u)^2+9}} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} \dfrac{\sqrt{2}\cos(u)\operatorname{csgn}\left(\dfrac{1}{5\cos(u)^2-9}\right)}{\sqrt{-5\cos(u)^2+9}} \\ \dfrac{\sqrt{2}\cos(u)\operatorname{csgn}\left(\dfrac{1}{5\cos(u)^2-9}\right)}{\sqrt{-5\cos(u)^2+9}} \\ \dfrac{3\sin(u)\operatorname{csgn}\left(\dfrac{1}{5\cos(u)^2-9}\right)}{\sqrt{-5\cos(u)^2+9}} \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} -\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{csgn}\left(\dfrac{1}{5\cos(u)^2-9}\right)}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{csgn}\left(\dfrac{1}{5\cos(u)^2-9}\right)}{2} \\ 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

> $simplify(subs(u=a, \mathbf{(9)}[1]))$

$$\left[\begin{array}{c} -\dfrac{\sqrt{21}\sqrt{2}}{14} \\ -\dfrac{\sqrt{21}\sqrt{2}}{14} \\ \dfrac{2\sqrt{7}}{7} \end{array}\right] \tag{10}$$

> $Tp\_ := \mathbf{(10)}[1]\cdot\_i + \mathbf{(10)}[2]\cdot\_j + \mathbf{(10)}[3]\cdot\_k$

$$\overrightarrow{Tp} := -\frac{\sqrt{21}\sqrt{2}\,\hat{i}}{14} - \frac{\sqrt{21}\sqrt{2}\,\hat{j}}{14} + \frac{2\sqrt{7}\,\hat{k}}{7} \tag{11}$$

> $evalf(\mathbf{(10)}[1]\cdot\_i + \mathbf{(10)}[2]\cdot\_j + \mathbf{(10)}[3]\cdot\_k)$

$$-0.4629100498\,\hat{i} - 0.4629100498\,\hat{j} + 0.7559289460\,\hat{k} \tag{12}$$

> $simplify(subs(u=a, \mathbf{(9)}[2]))$

(13)

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{7}}{7} \\ -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{7}}{7} \\ -\frac{\sqrt{21}}{7} \end{bmatrix} \quad (13)$$

> $Np\_ := (13)[1]\cdot\_i + (13)[2]\cdot\_j + (13)[3]\cdot\_k$

$$\overrightarrow{Np} := -\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{7}\,\hat{i}}{7} - \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{7}\,\hat{j}}{7} - \frac{\sqrt{21}\,\hat{k}}{7} \quad (14)$$

> $(9)[3]$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}\,\operatorname{csgn}\left(\frac{1}{5\cos(u)^2-9}\right)}{2} \\ \frac{\sqrt{2}\,\operatorname{csgn}\left(\frac{1}{5\cos(u)^2-9}\right)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

> $simplify(subs(u=a, (9)[3]))$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

> $Bp\_ := (16)[1]\cdot\_i + (16)[2]\cdot\_j + (16)[3]\cdot\_k$

$$\overrightarrow{Bp} := \frac{\sqrt{2}\,\hat{i}}{2} - \frac{\sqrt{2}\,\hat{j}}{2} \quad (17)$$

> $(11).(17)$

$$0 \quad (18)$$

>

> $S2 := subs(u=a, \langle A\cdot\cos(u)\cdot\cos(v), A\cdot\cos(u)\cdot\sin(v), B\cdot\sin(u)\rangle):$

> $simplify(subs(v=b, TNBFrame(S2, v)[1]))$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

>

> $KAMPYLOTHTAMESHMBRINOY := evalf(subs(u=a, Curvature(subs(v=b, \langle A\cdot\cos(u)\cdot\cos(v), A\cdot\cos(u)\cdot\sin(v), B\cdot\sin(u)\rangle))))$

$$KAMPYLOTHTAMESHMBRINOY := 0.2493918746 \quad (20)$$

> $KAMPYLOTHTAKYKLOY := evalf(subs(v=b, Curvature(subs(u=a, \langle A\cdot\cos(u)\cdot\cos(v), A\cdot\cos(u)\cdot\sin(v), B\cdot\sin(u)\rangle)))))$

$$KAMPYLOTHTAKYKLOY := 0.1924500898 \tag{21}$$

>

1a . Θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης .

>

> $E := simplify(diff(r\_, u).diff(r\_, u))$

$$E := -20\cos(u)^2 + 36 \tag{22}$$

> $F := simplify(diff(r\_, u).diff(r\_, v))$

$$F := 0 \tag{23}$$

> $G := simplify(diff(r\_, v).diff(r\_, v))$

$$G := 36\cos(u)^2 \tag{24}$$

>

1b . Θεμελιώδη μεγέθη δεύτερης τάξης .

>

> $N\_ := collect\left(simplify\left(\frac{(diff(r\_, u) \times diff(r\_, v))}{Norm(diff(r\_, u) \times diff(r\_, v))}, symbolic\right), \{\_i, \_j, \_k\}\right) :$

> $L := simplify(-diff(r\_, u).diff(N\_, u), symbolic)$

$$L := \frac{12}{\sqrt{-5\cos(u)^2 + 9}} \tag{25}$$

> $M := -\frac{1}{2}\cdot(diff(r\_, u).diff(N\_, v) + diff(r\_, v).diff(N\_, u))$

$$M := 0 \tag{26}$$

> $N := simplify(-diff(r\_, v).diff(N\_, v), symbolic)$

$$N := \frac{12\cos(u)^2}{\sqrt{-5\cos(u)^2 + 9}} \tag{27}$$

>

2 . Απεικόνιση Gauss .
Μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην Επιφάνεια .

> $N\_ := collect\left(simplify\left(\frac{(diff(r\_, u) \times diff(r\_, v))}{Norm(diff(r\_, u) \times diff(r\_, v))}, symbolic\right), \{\_i, \_j, \_k\}\right)$

$$\vec{N} := -\frac{2\cos(u)\cos(v)\,\hat{i}}{\sqrt{-5\cos(u)^2 + 9}} - \frac{2\cos(u)\sin(v)\,\hat{j}}{\sqrt{-5\cos(u)^2 + 9}} - \frac{3\sin(u)\,\hat{k}}{\sqrt{-5\cos(u)^2 + 9}} \tag{28}$$

> $evalf(subs(\{u=a, v=b\}, r\_))$

$$3.674234614\,\hat{i} + 3.674234614\,\hat{j} + 2.000000001\,\hat{k} \tag{29}$$

> $P := [Component(\mathbf{(29)}, 1), Component(\mathbf{(29)}, 2), Component(\mathbf{(29)}, 3)]$

$$P := [3.674234614, 3.674234614, 2.000000001] \tag{30}$$

> $KATHETODIANYSMA := evalf(subs(\{u=a, v=b\}, N\_))$

$$KATHETODIANYSMA := -0.5345224838\,\hat{i} - 0.5345224840\,\hat{j} - 0.6546536712\,\hat{k} \tag{31}$$

> $Norm(\mathbf{(31)})$

$$1.000000000 \tag{32}$$

> $n\_ := [Component(\mathbf{(31)}, 1), Component(\mathbf{(31)}, 2), Component(\mathbf{(31)}, 3)]$

$$\vec{n} := [-0.5345224838, -0.5345224840, -0.6546536712] \tag{33}$$

> $EFAPTOMENOEPIPEDO := ((x - P[1])\cdot\_i + (y - P[2])\cdot\_j + (z - P[3])\cdot\_k).(\mathbf{(31)})$

$=0$

$EFAPTOMENOEPIPEDO := -0.5345224838\,x + 5.237229368 - 0.5345224840\,y - 0.6546536712\,z = 0$ **(34)**

>

> $TpUU\_ := subs\left(\{u=a, v=b\}, \dfrac{diff(r\_, u)}{Norm(diff(r\_, u))}\right):$

> $evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \dfrac{diff(r\_, u)}{Norm(diff(r\_, u))}\right)\right)$

$$-0.4629100499\,\hat{i} - 0.4629100501\,\hat{j} + 0.7559289459\,\hat{k} \quad \textbf{(35)}$$

> $Norm(\textbf{(35)})$

$$1.000000000 \quad \textbf{(36)}$$

> $TUU\_ := [Component(\textbf{(35)}, 1), Component(\textbf{(35)}, 2), Component(\textbf{(35)}, 3)]$

$$\overrightarrow{TUU} := [-0.4629100499, -0.4629100501, 0.7559289459] \quad \textbf{(37)}$$

>

> $TpVV\_ := subs\left(\{u=a, v=b\}, \dfrac{diff(r\_, v)}{Norm(diff(r\_, v))}\right):$

> $evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \dfrac{diff(r\_, v)}{Norm(diff(r\_, v))}\right)\right)$

$$-0.7071067810\,\hat{i} + 0.7071067810\,\hat{j} \quad \textbf{(38)}$$

> $Norm(\textbf{(38)})$

$$0.9999999997 \quad \textbf{(39)}$$

> $TVV\_ := [Component(\textbf{(38)}, 1), Component(\textbf{(38)}, 2), Component(\textbf{(38)}, 3)]$

$$\overrightarrow{TVV} := [-0.7071067810, 0.7071067810, 0] \quad \textbf{(40)}$$

>

> $r1\_ := x\cdot\_i + y\cdot\_j + z\cdot\_k:$

> $n1\_ := subs(\{u=a, v=b\}, N\_):$

> $KATHETOEPIPEDOUU := evalf(subs(\{u=a, v=b\}, (rP\_ - r1\_).(n1\_ \times TpUU\_))) = 0$

$$KATHETOEPIPEDOUU := 0.7071067810\,x - 0.7071067810\,y = 0 \quad \textbf{(41)}$$

> $KATHETOEPIPEDOVV := evalf(subs(\{u=a, v=b\}, (rP\_ - r1\_).(n1\_ \times TpVV\_))) = 0$

$KATHETOEPIPEDOVV := 1.889822365 - 0.4629100500\,x - 0.4629100500\,y + 0.7559289459\,z = 0$ **(42)**

> $KATHETOEPIPEDOUUa := [x, x, z]:$

> $TOMHUU := intersectplot(surface(S, u=0..2\cdot \mathrm{Pi}, v=0..2\cdot\mathrm{Pi}), surface(KATHETOEPIPEDOUUa, x=-6..6, z=-5..5), thickness=5, color=red):$

> $TOMHVV := intersectplot(surface(S, u=0..2\cdot \mathrm{Pi}, v=0..2\cdot\mathrm{Pi}), surface(KATHETOEPIPEDOVV, x=-6..6, y=-6..6, z=-5..5), thickness=5, color=blue):$

>

3 . Καμπυλότητα Gauss .

> $K := simplify\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \dfrac{L\cdot N - M^2}{E\cdot G - F^2}\right)\right)$

$$K := \frac{16}{441} \quad \textbf{(43)}$$

>

4 . Μέση Καμπυλότητα

> $H := simplify\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \dfrac{E\cdot N-2\cdot F\cdot M+G\cdot L}{2\cdot\left(E\cdot G-F^2\right)}\right)\right)$

$$H := \frac{19\sqrt{21}}{441} \tag{44}$$

>

5 . Κύριες Καμπυλότητες

> $k[\max] := simplify\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \left(H+\sqrt{H^2-K}\right)\right)\right)$

$$k_{\max} := \frac{8\sqrt{21}}{147} \tag{45}$$

> $k[\min] := simplify\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \left(H-\sqrt{H^2-K}\right)\right)\right)$

$$k_{\min} := \frac{2\sqrt{21}}{63} \tag{46}$$

>

>

>

>

Επαλήθευση

Τελεστής Σχήματος στο τυχαίο σημείο $p=\vec{r}(u,v) \in M$

$$[S_p] = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{E\cdot G-F^2} \cdot \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι οι ΚΥΡΙΕΣ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΕΣ k[1],k[2] .

Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι οι κύριες κατευθύνσεις των ΚΥΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ .

Η ορίζουσα του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι η Καμπυλότητα Gauss

*Το (1/2)*ίχνος του πίνακα του Τελεστή Σχήματος στο τυχαίο σημείο p , είναι η Μέση Καμπυλότητα*

>

> $Sp := simplify\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \left(\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}\right)\right)\right)$

$$Sp := \begin{bmatrix} \frac{8\sqrt{21}}{147} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{21}}{63} \end{bmatrix} \quad \textbf{(47)}$$

> $simplify\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, \frac{1}{E\cdot G-F^2}\cdot\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}\right)\right)$

$$\begin{bmatrix} \frac{8\sqrt{21}}{147} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{21}}{63} \end{bmatrix} \quad \textbf{(48)}$$

> $LinearAlgebra[Eigenvalues](Sp)$

$$\begin{bmatrix} \frac{8\sqrt{21}}{147} \\ \frac{2\sqrt{21}}{63} \end{bmatrix} \quad \textbf{(49)}$$

>

> $LinearAlgebra[Eigenvectors](Sp)$

$$\begin{bmatrix} \frac{8\sqrt{21}}{147} \\ \frac{2\sqrt{21}}{63} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textbf{(50)}$$

>

>

>

ΠΡΟΣΟΧΗ : Τις Συντεταγμένες των Ιδιοδιανυσμάτων τις πήραμε από τον πίνακα :

$$\begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{21}}{63} \\ \frac{8\sqrt{21}}{147} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

>

> $XEVk[\max] := 1 :$

> $YEVk[\max] := 0 :$

> $XEVk[\min] := 0 :$

> $YEVk[\min] := 1 :$

>

>

> $U := subs(\{u=a, v=b\}, \boldsymbol{diff}(\boldsymbol{r\_}, \boldsymbol{u}))$

$$U := -6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{i} - 6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{j} + 4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\hat{k} \quad \textbf{(51)}$$

> $V := subs(\{u=a, v=b\}, diff(r\_, v))$

$$V := -6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{i} + 6\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{j} \quad (52)$$

>

ΠΡΟΣΕΧΟΥΜΕ ΤΑ e1,e2 . Το e1 αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη Ιδιοτιμή .

>

> $e1 := \frac{XEVk[\max]\cdot U + YEVk[\max]\cdot V}{Norm(XEVk[\max]\cdot U + YEVk[\max]\cdot V)}$

$$e1 := \frac{\left(-\frac{3\sqrt{2}\,\hat{i}}{2} - \frac{3\sqrt{2}\,\hat{j}}{2} + 2\sqrt{3}\,\hat{k}\right)\sqrt{21}}{21} \quad (53)$$

> $e2 := \frac{XEVk[\min]\cdot U + YEVk[\min]\cdot V}{Norm(XEVk[\min]\cdot U + YEVk[\min]\cdot V)}$

$$e2 := \frac{\left(-\frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}\,\hat{i}}{2} + \frac{3\sqrt{3}\sqrt{2}\,\hat{j}}{2}\right)\sqrt{27}}{27} \quad (54)$$

> $e1 \cdot e2$

$$0 \quad (55)$$

>

> $KAMPYLOTHTAGAUSS := subs(\{u=a, v=b\}, LinearAlgebra[Determinant](Sp))$

$$KAMPYLOTHTAGAUSS := \frac{16}{441} \quad (56)$$

> $MESHKAMPYLOTHTA := subs\left(\{u=a, v=b\}, \frac{1}{2}\cdot LinearAlgebra[Trace](Sp)\right)$

$$MESHKAMPYLOTHTA := \frac{19\sqrt{21}}{441} \quad (57)$$

>

Εξίσωση Δείκτριας Dupin στο σημείο P ..

>

Θεώρημα 1. Σελ. 218 ,ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ .

Σε κάθε σημείο P μιάς επιφάνειας S
υπάρχουν δύο αμοιβαία κάθετες διευθύνσεις ,
που κείνται στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο P ,
γιά τις οποίες η καμπυλότητα K=1/R λαμβάνει την μεγαλύτερη και μικρότερη τιμή της K_1 και K_2 αντίστοιχα .
Η καμπυλότητα ως προς οποιοδήποτε άλλο επίπεδο Π , το οποίο τέμνει την S και περιέχει το κάθετο σε αυτή διάνυσμα $\vec{n}$ δίδεται από την :

$$K_1[P]\cdot\cos^2(\theta) + K_2[P]\cdot\sin^2(\theta) = K[P](\theta) \quad \textit{Τύπος Euler}$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζει το επίπεδο Π με την διεύθυνση της μεγαλύτερης καμπυλότητας .

>

> $evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, M^2 - L\cdot N\right)\right) < 0$

$$-20.57142856 < 0 \quad (58)$$

> $evalf(subs(\{u = a, v = b\}, K)) > 0$

$$0 < 0.03628117914 \tag{59}$$

> $(PQ) := \sqrt{R}$

$$PQ := \sqrt{R} \tag{60}$$

>

>

> $R[1] := \dfrac{1}{\text{abs}(k[\max])}$

$$R_1 := \frac{7\sqrt{21}}{8} \tag{61}$$

> $R[2] := \dfrac{1}{\text{abs}(k[\min])}$

$$R_2 := \frac{3\sqrt{21}}{2} \tag{62}$$

> $\dfrac{R}{R[1]} \cdot \cos^2(\omega) + \dfrac{R}{R[2]} \cdot \sin^2(\omega) = 1$

$$\frac{8 R\sqrt{21}\cos(\omega)^2}{147} + \frac{2 R\sqrt{21}\sin(\omega)^2}{63} = 1 \tag{63}$$

>

>

> $X[Q] = (PQ) \cdot \cos(\omega)$

$$X_Q = \sqrt{R}\cos(\omega) \tag{64}$$

> $Y[Q] = (PQ) \cdot \sin(\omega)$

$$Y_Q = \sqrt{R}\sin(\omega) \tag{65}$$

> $\dfrac{X[Q]^2}{(\text{sqrt}(R[1]))^2} + \dfrac{Y[Q]^2}{(\text{sqrt}(R[2]))^2} = 1 :$

>

> $rP\_ := evalf(subs(\{u = a, v = b\}, r\_))$

$$\overrightarrow{rP} := 3.674234614\,\hat{i} + 3.674234614\,\hat{j} + 2.000000001\,\hat{k} \tag{66}$$

>

> $rD\_ := evalf(rP\_ + \text{sqrt}(R[1]) \cdot \cos(\omega) \cdot e1 + \text{sqrt}(R[2]) \cdot \sin(\omega) \cdot e2)$

$$\overrightarrow{rD} := (3.674234614 - 0.9269481878\cos(\omega) - 1.853896376\sin(\omega))\,\hat{i} + (3.674234614 - 0.9269481878\cos(\omega) + 1.853896376\sin(\omega))\,\hat{j} + (2.000000001 + 1.513700053\cos(\omega))\,\hat{k} \tag{67}$$

> $XD := Component(\textbf{(67)}, 1)$

$$XD := 3.674234614 - 0.9269481878\cos(\omega) - 1.853896376\sin(\omega) \tag{68}$$

> $YD := Component((\mathbf{67}), 2)$

$$YD := 3.674234614 - 0.9269481878 \cos(\omega) + 1.853896376 \sin(\omega) \tag{69}$$

> $ZD := Component((\mathbf{67}), 3)$

$$ZD := 2.000000001 + 1.513700053 \cos(\omega) \tag{70}$$

>

>

Μία καμπύλη επί του Ελλειψοειδούς και που περνάει από το σημείο $P\left(u = \frac{Pi}{6}, v = \frac{Pi}{4}\right)$.

Να υπολογισθούν η παράγωγος του μήκους : $\frac{d}{dt}s$

και η καμπυλότητα της επιφάνειας στο P .

Υπολογισμός της παραγώγου του μήκους : $\frac{d}{dt}s$ $\quad diff(s(t), t) = \sqrt{E \cdot \dot{u}^2 + 2 \cdot F \cdot \dot{u} \cdot \dot{v} + G \cdot \dot{v}^2}$:

$$diff(s(t), t) = \sqrt{E \cdot (diff(u(t), t))^2 + 2 \cdot F \cdot diff(u(t), t) \cdot diff(v(t), t) + G \cdot (diff(v(t), t))^2} : \tag{2.191}$$

Υπολογισμός της καμπυλότητας της επιφάνειας στο P .

$$U := \frac{diff(u(t), t)}{diff(s(t), t)} :$$

$$V := \frac{diff(v(t), t)}{diff(s(t), t)} : \tag{2.191}$$

$$K := L \cdot U^2 + 2 \cdot M \cdot U \cdot V + N \cdot V^2 :$$

> $Curve := subs(\{u = c \cdot t + a, v = b + t\}, S)$

$$Curve := \left[6 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right), 6 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right), 4 \sin\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right)\right] \tag{71}$$

> $PCurve := evalf(subs(t = 0, Curve))$

$$PCurve := [3.674234614, 3.674234614, 2.000000001] \tag{72}$$

> $rC\_ := (\mathbf{71})[1] \cdot \_i + (\mathbf{71})[2] \cdot \_j + (\mathbf{71})[3] \cdot \_k$

$$\overrightarrow{rC} := 6 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \hat{i} + 6 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \hat{j} + 4 \sin\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \hat{k} \tag{73}$$

> $\frac{(diff(rC\_, t))}{Norm(diff(rC\_, t))}$

$$\Bigg(-2\pi \sin\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \hat{i} - 6 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \hat{i} \tag{74}$$

$$- 2\pi \sin\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \hat{j} + 6 \cos\left(\frac{1}{3}\pi t + \frac{1}{6}\pi\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \hat{j}$$

$$+\frac{4\pi\cos\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)\hat{k}}{3}\Bigg)\Bigg/$$

$$\left(\left(-2\pi\sin\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-6\cos\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right)^2+\left(-2\pi\sin\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+6\cos\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right)^2+\frac{16\pi^2\cos\left(\frac{1}{3}\pi t+\frac{1}{6}\pi\right)^2}{9}\right)^{1/2}$$

> *evalf*(*subs*(**t = 0**, **(74)**))

$$-0.8335321775\,\hat{i}+0.2053962623\,\hat{j}+0.5128708265\,\hat{k} \tag{75}$$

> *Norm*(**(75)**)

$$1.000000000 \tag{76}$$

>

>

> [*Component*(**(75)**, 1), *Component*(**(75)**, 2), *Component*(**(75)**, 3)]

$$[-0.8335321775, 0.2053962623, 0.5128708265] \tag{77}$$

>

> *KATHETOEPIPEDOCC* := *evalf*(*subs*({*u* = *a*, *v* = *b*}, (*rP_* − *r1_*).(*n1_* × **(75)**)))

$$KATHETOEPIPEDOCC := 1.388326524+0.1396775712\,x-0.8198158879\,y+0.5553306103\,z \tag{78}$$

>

> *TOMHCC* := *intersectplot*(*surface*(*S*, *u* = 0 ..2· Pi, *v* = 0 ..2·Pi), *surface*(*KATHETOEPIPEDOCC*, *x* =−6 ..6, *y* =−6 ..6, *z* =−5 ..5), *thickness* = 2, *color* = *black*) :

>

> $ANGLE(u-C) := \cos^{-1}\left(evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b, t=0\}, \frac{diff(r\_, u)}{Norm(diff(r\_, u))}\cdot\frac{(diff(rC\_, t))}{Norm(diff(rC\_, t))}\right)\right)\right)$

$$ANGLE(u-C) := 0.8251261028 \tag{79}$$

> $\frac{(79)\cdot 180}{Pi}$ degree

$$47.27624325 \text{ arcdeg} \tag{80}$$

> $ANGLE(v-C) := \cos^{-1}\left(evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b, t=0\}, \frac{diff(r\_, v)}{Norm(diff(r\_, v))}\cdot\frac{(diff(rC\_, t))}{Norm(diff(rC\_, t))}\right)\right)\right)$

$$ANGLE(v-C) := 0.7456702233 \tag{81}$$

> $\frac{(81)\cdot 180}{Pi}$ degree

$$42.72375670 \text{ arcdeg} \tag{82}$$

>

Καμπυλότητα με εφαρμογή του τύπου του EULER

•

> $evalf\left(k[\max]\cdot\cos^2(ANGLE(u-C))+k[\min]\cdot\sin^2(ANGLE(u-C))\right)$

$$0.1933113159 \quad (83)$$

>

Καμπυλότητα της Επιφάνειας στο P κατά την διεύθυνση της Εφαπτομένης της καμπύλης Curve στο P .

Υπολογισμός της παραγώγου του μήκους : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s \quad diff(s(t),t)=\sqrt{E\cdot\dot{u}^2+2\cdot F\cdot\dot{u}\cdot\dot{v}+G\cdot\dot{v}^2}$:

$$diff(s(t),t)=\sqrt{E\cdot(diff(u(t),t))^2+2\cdot F\cdot diff(u(t),t)\cdot diff(v(t),t)+G\cdot(diff(v(t),t))^2}: \quad (2.191)$$

Υπολογισμός της καμπυλότητας της επιφάνειας στο P .

$$U:=\frac{diff(u(t),t)}{diff(s(t),t)}:$$
$$V:=\frac{diff(v(t),t)}{diff(s(t),t)}: \quad (2.191)$$
$$K:=L\cdot U^2+2\cdot M\cdot U\cdot V+N\cdot V^2:$$

> $Curve := subs(\{u=c\cdot t+a, v=b+t\}, S)$:

> $subs(t=0, diff(c\cdot t+a, t))$

$$\frac{\pi}{3} \quad (84)$$

> $subs(t=0, diff(b+t, t))$

$$1 \quad (85)$$

> $dS := evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b, t=0\}, \mathrm{sqrt}\left(E\cdot(84)^2+2\cdot F\cdot(84)\cdot(85)+G\cdot(85)^2\right)\right)\right)$

$$dS := 7.073123563 \quad (86)$$

> $U1 := simplify\left(\frac{(84)}{dS}\right)$

$$U1 := 0.1480530550 \quad (87)$$

> $V1 := simplify\left(\frac{(85)}{dS}\right)$

$$V1 := 0.1413802532 \quad (88)$$

> $K := evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b\}, L\cdot U1^2+2\cdot M\cdot U1\cdot V1+N\cdot V1^2\right)\right)$

$$K := 0.1933113160 \quad (89)$$

>

Καμπυλότητα της Επιφάνειας στο P κατά την διεύθυνση της Εφαπτομένης της καμπύλης Curve στο P .

Συναρτήσει της $c=C$ χωρίς βλάβη της γενικότητας

>

> $KE := evalf\left(subs\left(\{u=a, v=b, t=0, C=c\}, \left(\frac{L\cdot C^2+2\cdot M\cdot C+N}{dS^2}\right)\right)\right)$

$KE := 0.1933113159$ **(90)**

>

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

```
> p1 := plot3d(S, u = 0 ..2· Pi, v = 0 ..Pi, labels = [x, y, z], title
   = "ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ\nΓΗ ΠΕΠΛΑΤΥΣΜΕΝΗ & ΔΕΙΚΤΡΙΑ
  DUPIN\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ ", titlefont = [arial, bold, 12]) :
> p2 := implicitplot3d(EFAPTOMENOEPIPEDO, x = P[1] − 1 ..P[1] + 1, y = P[2] − 1
   ..P[2] + 1, z = P[3] − 3 ..P[3] + 3, style = surface, color = green, transparency = 0.50) :
> p3 := pointplot3d(P, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = blue) :
> p4 := arrow(P, -n_, color = green, width = 0.1, length = 3) :
> p5 := implicitplot3d(KATHETOEPIPEDOUU, x = P[1] − 1 ..P[1] + 1, y = P[2] − 1 ..P[2]
   + 1, z = P[3] − 1 ..P[3] + 1 , style = surface, color = red, transparency = 0.00) :
> p5a := implicitplot3d(KATHETOEPIPEDOVV, x = P[1] − 1 ..P[1] + 1, y = P[2] − 1 ..P[2]
   + 1, z = P[3] − 2 ..P[3] + 2 , style = surface, color = blue, transparency = 0.00) :
> DUPIN := spacecurve( [XD, YD, ZD], ω = 0 ..2·Pi, thickness = 3, color = red) :
> ARTpUU := arrow(P, TUU_, color = red, width = 0.1, length = 3) :
> ARTpVV := arrow(P, TVV_, color = blue, width = 0.1, length = 3) :
>
> UU := spacecurve(subs(v = 0, S), u = 0 ..2·Pi, thickness = 2, color = red) :
> VV := spacecurve(subs(u = 0, S), v = 0 ..2·Pi, thickness = 2, color = blue) :
> OO := pointplot3d(subs( {u = 0, v = 0}, S), symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color
   = yellow) :
>
> ARXH := pointplot3d( [0, 0, 0], symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = black) :
> axX := spacecurve( [λ, 0, 0], λ = -8 ..8, linestyle = 4, color = black) :
> axY := spacecurve( [0, λ, 0], λ = -8 ..8, linestyle = 4, color = black) :
> axZ := spacecurve( [0, 0, λ], λ = -5 ..5, linestyle = 4, color = black) :
> OP := spacecurve( [λ·P[1], λ·P[2], λ·P[3]], λ = 0 ..1, thickness = 1, color = black) :
>
> animQ := animate(pointplot3d, [ [XD, YD, ZD], symbol = solidcircle, symbolsize = 8, color
   = blue], ω = 0 ..2·Pi, frames = 6, trace = 5) :
> animPQ := animate(spacecurve, [ [P[1] + λ·(XD − P[1]), P[2] + λ·(YD − P[2]), P[3]
   + λ·(ZD − P[3]) ], λ = 0 ..1, linestyle = 4, thickness = 1, color = blue], ω = 0 ..2·Pi,
  frames = 6, trace = 5) :
> animOQ := animate(spacecurve, [ [0 + λ·(XD − 0), 0 + λ·(YD − 0), 0 + λ·(ZD − 0) ], λ
   = 0 ..1, linestyle = 1, thickness = 1, color = cyan], ω = 0 ..2·Pi, frames = 6, trace = 5) :
>
> SUM := display(TOMHUU, TOMHVV, p1, p2, p3, p4, p5, p5a, DUPIN, ARTpUU, ARTpVV,
  UU, VV, OO, ARXH, axX, axY, axZ, OP, animQ, animPQ, animOQ, labels = [x, y, z],
  labelfont = [arial, bold, 14], orientation = [65, 80, 0], scaling = constrained, axes
   = boxed) :
> SUMa := display(p3, p4, DUPIN, ARTpUU, ARTpVV, UU, VV, OO, ARXH, axX, axY, axZ,
  OP, animQ, animPQ, animOQ, labels = [x, y, z], labelfont = [arial, bold, 14], orientation
   = [-35, 75, 0], scaling = constrained, axes = boxed, title
   = "ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ\nΓΗ ΠΕΠΛΑΤΥΣΜΕΝΗ & ΔΕΙΚΤΡΙΑ
  DUPIN\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ ", titlefont = [arial, bold, 12], axes = none) :
>
```

> $B1 := spacecurve(Curve, t = -2 ..2, thickness = 2, color = magenta)$:

> $ARTC := arrow(PCurve, \mathbf{(77)}, color = BLACK, length = 2, width = 0.1)$:

>

> $display(SUM, B1, ARTC, TOMHCC, scaling = constrained, orientation = [35, 75, 0])$:

> $display(SUMa, B1, ARTC, TOMHCC, scaling = constrained, orientation = [35, 75, 0])$:

>