ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE

Εξισώσεις Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\right) - \frac{\partial}{\partial q_i} L = 0 \text{ , } i = 1, 2,...n \quad \Rightarrow \text{Δ.Ε. (\textit{Διαφορικές Εξισώσεις Κίνησης})}$$

Όπου :

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

Η Λαγκραζιανή του Συστήματος και

$T :=$ Κινητική Ενέργεια του Συστήματος ως προς Επιλεγμένο Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς

$V :=$ Δυναμική Ενέργεια του Συστήματος ως προς Επιλεγμένο Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς

q_i $\quad i = 1, 2,..n$, Γενικευμένες Συντεταγμένες Ανεξάρτητες Μεταξύ τους

$\dot{q}_i$ $\quad i = 1, 2,..n$, Γενικευμένες Ταχύτητες Ανεξάρτητες Μεταξύ τους

Εύρεση των Βαθμών Ελευθερίας (ΒΕ) Επίπεδου Μηχανισμού .

Το πλήθος των Βαθμών Ελευθερίας (ΒΕ) ενός **Επιπέδου** Μηχανισμού υπολογίζεται με τη βοήθεια της Εξίσωσης Kutzbach :

$$\mathbf{F=3\cdot(n-1)-2\cdot f_1 - f_2}$$

όπου :

F=πλήθος (ΒΕ) του μηχανισμού

n=πλήθος μελών (περιλαμβάνεται και η βάση)

f_1 = πλήθος συνδέσεων που διαθέτουν 1-ΒΕ

f_2 = πλήθος συνδέσεων που διαθέτουν 2-ΒΕ

Συλλογιστική : Από το συνολικό πλήθος ΒΕ του μηχανισμού διαγράφονται οι Δεσμευμένοι ΒΕ .

ΤΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ ΔΕΝ ΔΕΣΜΕΥΕΙ (Β.Ε.) !.

ΘΕΜΑ :

Υλικό σημείο Σ κινείται υπό την επίδραση του βάρους του πάνω στην κυκλοειδή καμπύλη : **x=α*(θ-sin(θ), z=α*(1-cos(θ))** . 0≤θ≤2*Pi .

Η ΚΙΝΗΣΗ γίνεται στο κατακόρυφο επίπεδο OXZ .

Να περιγραφεί η κίνηση .

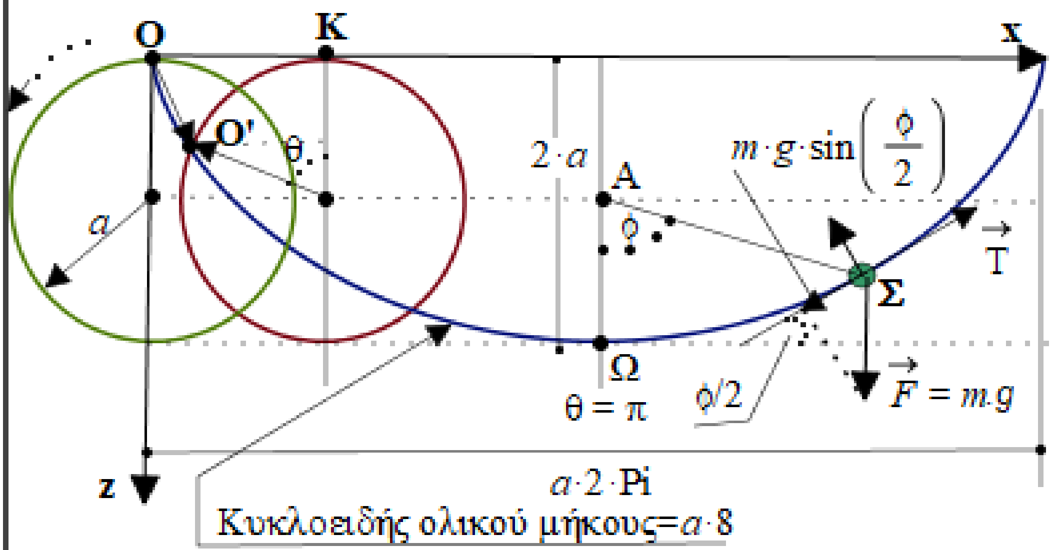
Δεδομένα : α=Ακτίνα κυλιόμενης, κατά φορά αντίθετη με αυτήν των δεικτών ωρολογίου άνευ ολισθήσεως , κυκλικής στεφάνης επί του άξονα OX .

```
> restart
> with(plots) :
> with(plottools) :
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
> plot( {[1·(θ − sin(θ)), -1·(1 − cos(θ)), θ = 0 ..2·Pi], [1·cos(θ), -1 + 1·sin(θ), θ = 0
    ..2·Pi], [1.2 + 1· cos(θ), -1 + 1·sin(θ), θ = 0 ..2·Pi]}, scaling = constrained,
    gridlines, axes = none) :
```

O'(x,z)

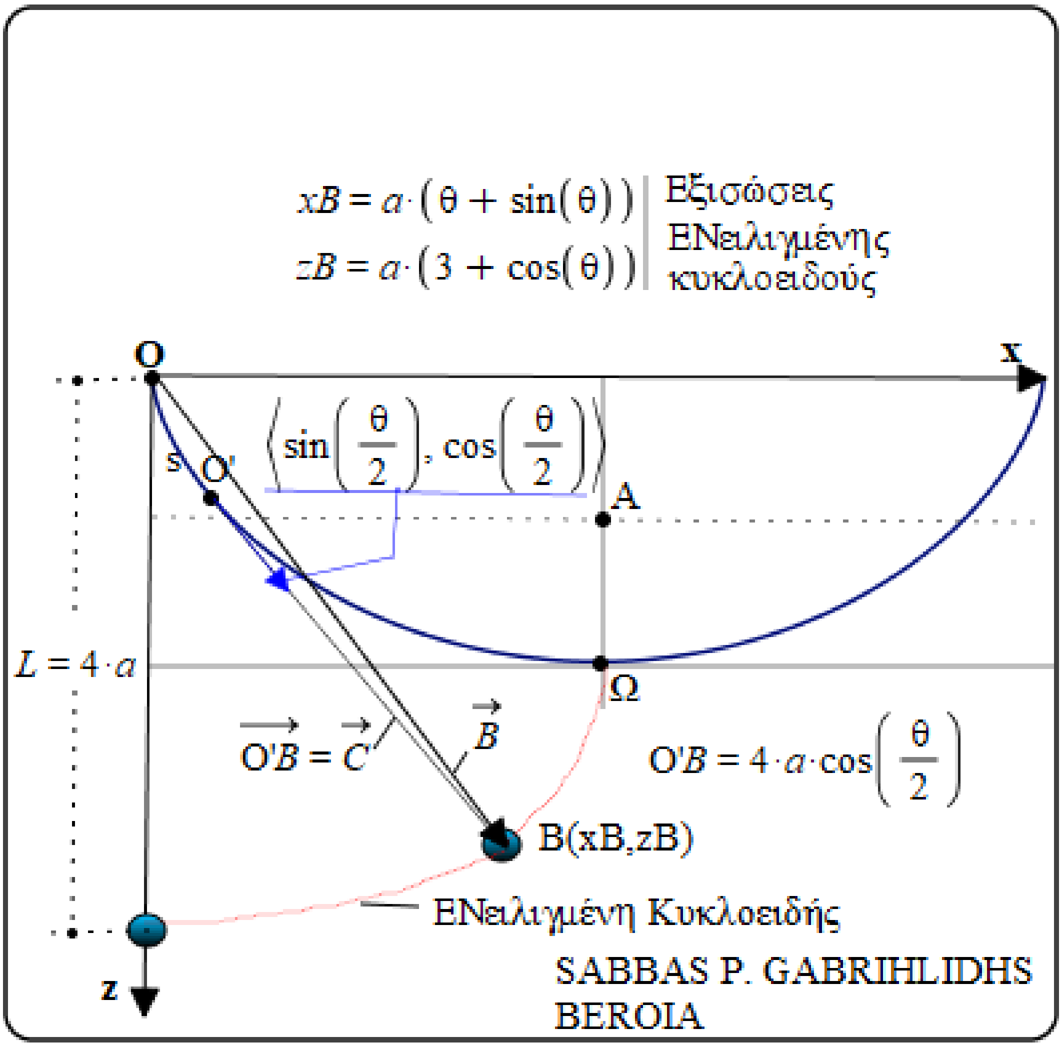
$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot(\theta - \sin(\theta)) \\ z &= a\cdot(1 - \cos(\theta)) \end{aligned}\right| \quad \text{Εξισώσεις Εξειλιγμένης κυκλοειδούς}$$

$$s\overset{\frown}{OO'} = 4\cdot a\cdot\left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{Μήκος κυκλοειδούς}$$

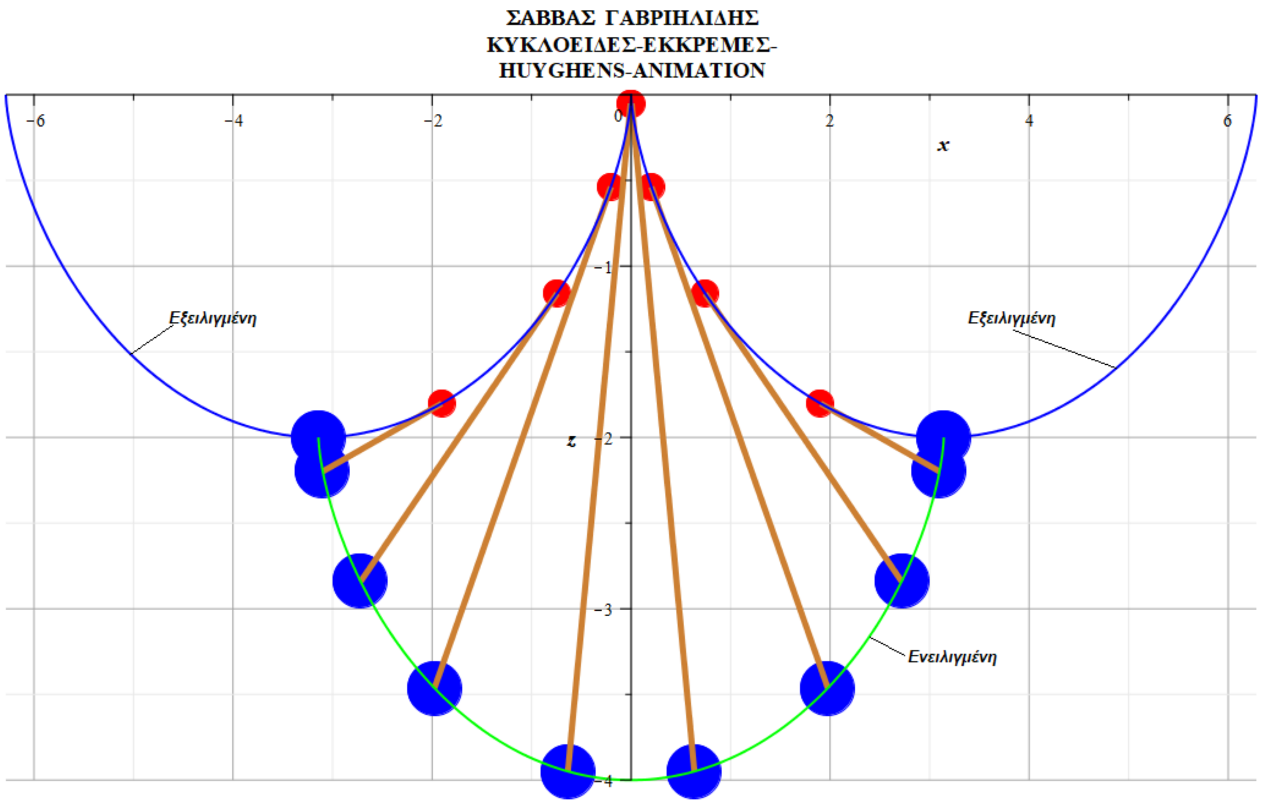


φ :πλάτος ταλάντωσης Υλικού Σημείου Σ .

SABBAS P. GABRIHLIDHS
BEROIA



$xB = a \cdot (\theta + \sin(\theta))$
$zB = a \cdot (3 + \cos(\theta))$
Εξισώσεις
ΕΝειλιγμένης
κυκλοειδούς
O
x
$\left\langle \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\rangle$
s
O'
A
$L = 4 \cdot a$
Ω
$\overrightarrow{O'B} = \vec{C}$
$\vec{B}$
$O'B = 4 \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
B(xB,zB)
ΕΝειλιγμένη Κυκλοειδής
SABBAS P. GABRIHLIDHS
BEROIA
z



ΔΕΔΟΜΕΝΑ :

> $R\_ := a\cdot(\theta - \sin(\theta))\cdot\_i + a\cdot(1-\cos(\theta))\cdot\_k$

$$\vec{R} := \hat{i}\,(-a\sin(\theta) + a\,\theta) + \hat{k}\,(-a\cos(\theta) + a) \tag{1}$$

> $diff(R\_, \theta)$

$$\hat{i}\,(-a\cos(\theta) + a) + \hat{k}\,a\sin(\theta) \tag{2}$$

> $simplify(Norm(\mathbf{(2)}))$ assuming $a > 0, \theta > 0$

$$a\sqrt{2 - 2\cos(\theta)} \tag{3}$$

> $simplify\left(subs\left(\cos(\theta) = 1 - 2\cdot\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathbf{(3)}\right), symbolic\right)$

$$2\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{4}$$

> $L := 4\cdot a$

$$L := 4\,a \tag{5}$$

> $s := 4\cdot a\cdot\left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$

$$s := 4\,a\left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \tag{6}$$

> $simplify(L - s)$

$$4\,a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{7}$$

> $C\_ := \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\mathbf{(7)}\cdot\_i + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\mathbf{(7)}\cdot\_k$

$$\vec{C} := 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{i} + 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 a\,\hat{k} \quad \textbf{(8)}$$

> $B\_ := R\_ + C\_$

$$\vec{B} := \hat{i}\left(-a\sin(\theta) + a\,\theta + 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \hat{k}\left(-a\cos(\theta) + a + 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 a\right) \quad \textbf{(9)}$$

> $B\_ := subs\left(4\cdot a\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\cdot a\cdot\sin(\theta), 4\cdot\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot a = 2\cdot a + 2\cdot a\cdot\cos(\theta), \textbf{(9)}\right)$

$$\vec{B} := \hat{i}\,(a\sin(\theta) + a\,\theta) + \hat{k}\,(a\cos(\theta) + 3\,a) \quad \textbf{(10)}$$

Εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{T1} = \left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\rangle$ στο σημείο Ο' της ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΗΣ Κυκλοειδούς . (Κανόνας Αλυσίδας στην παραγώγιση).

> $diff(R\_, \theta)$

$$\hat{i}\,(-a\cos(\theta) + a) + \hat{k}\,a\sin(\theta) \quad \textbf{(11)}$$

> $diff(s, \theta)$

$$2\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \textbf{(12)}$$

> $T1\_ := simplify\left(\frac{\textbf{(11)}}{\textbf{(12)}}\right)$

$$\overrightarrow{T1} := \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{i} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{k} \quad \textbf{(13)}$$

>

Εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{T2} = \left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\rangle$ στο σημείο Β της ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΗΣ Κυκλοειδούς . (Κανόνας Αλυσίδας στην παραγώγιση).

> $diff(B\_, \theta)$

$$\hat{i}\,(a\cos(\theta) + a) - \hat{k}\,a\sin(\theta) \quad \textbf{(14)}$$

> $simplify(Norm(\textbf{(14)}))$ assuming $a > 0$

$$a\sqrt{2 + 2\cos(\theta)} \quad \textbf{(15)}$$

> $simplify\left(subs\left(2 + 2\cdot\cos(\theta) = 4\cdot\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \textbf{(15)}\right), symbolic\right)$

$$2\,a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \textbf{(16)}$$

> $sB := int\left(2\cdot a\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \theta = 0..\theta\right)$

$$sB := 4\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \textbf{(17)}$$

> $diff(sB, \theta)$

(18)

$$2\,a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \textbf{(18)}$$

> $simplify\left(\frac{\textbf{(14)}}{\textbf{(18)}}\right)$

$$\frac{-\hat{k}\sin(\theta)+\cos(\theta)\,\hat{i}+\hat{i}}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \textbf{(19)}$$

> $T2\_ := simplify\left(subs\left(1+\cos(\theta)=2\cdot\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin(\theta)=2\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \textbf{(19)}\right)\right)$

$$\overrightarrow{T2} := \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{i} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\hat{k} \quad \textbf{(20)}$$

> T1_.T2_

$$0 \quad \textbf{(21)}$$

>

ΑΡΑ ΤΟ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΣΤΗΝ ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\overrightarrow{T1}$ ΕΙΝΑΙ ΚΑΘΕΤΟ ΣΤΟ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΣΤΗΝ ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΗ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\overrightarrow{T2}$.!!! !!!!

Μήκη Κυκλοειδούς :

> $s[total] := Int(\textbf{(4)}, \theta=0..2\cdot\text{Pi}) = int(\textbf{(4)}, \theta=0..2\cdot\text{Pi})$

$$s_{total} := \int_0^{2\pi} 2\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = 8\,a \quad \textbf{(22)}$$

> $s[part] := Int(\textbf{(4)}, \theta=0..\theta) = factor(int(\textbf{(4)}, \theta=0..\theta))$ assuming $a>0,\ 0<\theta<2\cdot\text{Pi}$

$$s_{part} := \int_0^{\theta} 2\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = -4\,a\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)-1\right) \quad \textbf{(23)}$$

> $s[O\Omega] := Int(\textbf{(4)}, \theta=0..\text{Pi}) = int(\textbf{(4)}, \theta=0..\text{Pi})$

$$s_{O\Omega} := \int_0^{\pi} 2\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = 4\,a \quad \textbf{(24)}$$

> $s[O\Sigma] := Int(\textbf{(4)}, \theta=0..\text{Pi}+\phi) = int(\textbf{(4)}, \theta=0..\text{Pi}+\phi)$ assuming $-\pi\le\phi\le\pi$

$$s_{O\Sigma} := \int_0^{\pi+\phi} 2\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = 8\,a - 4\,a\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)^2 + 8\,a\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)\sin\left(\frac{\phi}{4}\right) - 4\,a\sin\left(\frac{\phi}{4}\right)^2 \quad \textbf{(25)}$$

> $s[\Omega\Sigma] := s[O\Sigma] - s[O\Omega]$

$$s_{\Omega\Sigma} := \int_0^{\pi+\phi} 2\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta - \left(\int_0^{\pi} 2\,a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta\right) = 4\,a - 4\,a\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)^2 + 8\,a\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)\sin\left(\frac{\phi}{4}\right) - 4\,a\sin\left(\frac{\phi}{4}\right)^2 \quad \textbf{(26)}$$

Εφαπτόμενο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{\mathbf{T}} = \left\langle \frac{dx}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\rangle$ στο σημείο Σ . (Κανόνας Αλυσίδας στην παραγώγιση).

> $\frac{diff(a\cdot(\phi + \mathrm{Pi} - \sin(\phi + \mathrm{Pi})), \phi)}{diff\left(4\ a + 4\ a\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \phi\right)}$

$$\frac{1 + \cos(\phi)}{2\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)} \qquad \textbf{(27)}$$

> $subs\left(1 + \cos(\phi) = 2\cdot\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right), \textbf{(27)}\right)$

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \qquad \textbf{(28)}$$

> $\frac{diff(a\cdot(1 - \cos(\phi + \mathrm{Pi})), \phi)}{diff\left(4\ a + 4\ a\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \phi\right)}$

$$-\frac{\sin(\phi)}{2\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)} \qquad \textbf{(29)}$$

> $subs\left(\sin(\phi) = 2\cdot\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \textbf{(29)}\right)$

$$-\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \qquad \textbf{(30)}$$

> $T\_ := \textbf{(28)}\cdot\_i + \textbf{(30)}\cdot\_k$

$$\vec{T} := \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\hat{i} - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\hat{k} \qquad \textbf{(31)}$$

Άρα η εφαπτομένη $\vec{T}$ της Κυκλοειδούς στο σημείο Σ σχηματίζει γωνία , με τον άξονα των X , φ/2 προς τα επάνω ,όπως φαίνεται στο σχήμα .

Κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{N}$ στο σημείο Σ .(Από το σχήμα :)

> $N\_ := -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cdot\_i - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\cdot\_k$

$$\vec{N} := -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\hat{i} - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\hat{k} \qquad \textbf{(32)}$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ Σ .(Αρχή μέτρησης των μηκών το κατώτερο σημείο Ω πού αντιστοιχεί σε θ=π . Σχέση (2.47) ,σελ.132 , ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ .

> $m\cdot a[\Sigma] = m\cdot[diff(S(t), t\$2)\cdot T\_ + K\cdot(diff(S(t), t))^2\cdot N\_]:$

> $F\_ := -m\cdot g\cdot\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cdot T\_ = -\frac{m\cdot g\cdot S(t)}{4\cdot a}\cdot T\_:$

Επομένως :

> $diff(S(t), t\$2) = -\frac{g\cdot S(t)}{4\cdot a}$

(33)

$$\ddot{S}(t) = -\frac{g\,S(t)}{4\,a} \qquad (33)$$

> $ode := lhs((\mathbf{33})) - rhs((\mathbf{33})) = 0$

$$ode := \ddot{S}(t) + \frac{g\,S(t)}{4\,a} = 0 \qquad (34)$$

> $\boldsymbol{ics\Sigma := S(0) = rhs(s[\Omega\Sigma]), \mathrm{D}(S)(0) = 0}$

$$ics\Sigma := S(0) = 4\,a - 4\,a\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)^2 + 8\,a\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)\sin\left(\frac{\phi}{4}\right) - 4\,a\sin\left(\frac{\phi}{4}\right)^2, \mathrm{D}(S)(0) = 0 \qquad (35)$$

> $dsolve(\{ode, ics\Sigma\})$

$$S(t) = \left(4\,a - 4\,a\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)^2 + 8\,a\cos\left(\frac{\phi}{4}\right)\sin\left(\frac{\phi}{4}\right) - 4\,a\sin\left(\frac{\phi}{4}\right)^2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{a}}\right) \qquad (36)$$

>

Γιά S(t)=s[ΩΣ], έχουμε μία πλήρη ταλάντωση του υλικού Σημείου Σ , άρα t=T ,

$\cos\left(\frac{\sqrt{g}\,T}{2\sqrt{a}}\right) = 1, \Rightarrow \frac{\sqrt{g}\,T}{2\sqrt{a}} = 2\cdot\mathrm{Pi}, \Rightarrow$ **ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΠΛΑΤΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ φ .!!!!!!**

> $\mathbf{T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{4\cdot a}{g}}}$

$$\mathrm{T} = 4\,\pi\sqrt{\frac{a}{g}} \qquad (37)$$

> $T := simplify\left(subs\left(a = 1\,\mathrm{m}, g = 9.80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, rhs((\mathbf{37}))\right)\right)$

$$T := 4.014179848\ \mathrm{s} \qquad (38)$$

> $\mathbf{4\cdot T}$

$$16.05671939\ \mathrm{s} \qquad (39)$$

Χρόνος που απαιτείται γιά να φθάσει το Υλικό Σημείο στο κατώτερο σημείο Ω .

Γιά S(t)=0 έχουμε :

> $0 = 4\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)a\cos\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{a}}\right)$

$$0 = 4\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)a\cos\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{a}}\right) \qquad (40)$$

> $\cos\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{a}}\right) = 0$

$$\cos\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{a}}\right) = 0 \qquad (41)$$

> $\left(\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{a}}\right) = \frac{\mathrm{Pi}}{2}$

$$\frac{\sqrt{g}\,t}{2\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2} \qquad (42)$$

> $t = solve((\mathbf{42}), t)$

$$t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}} \quad (43)$$

> $apaitoymenot := simplify\left(subs\left(a = 1\,\mathrm{m}, g = 9.80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, rhs((\mathbf{43}))\right)\right)$

$$apaitoymenot := 1.003544962\ \mathrm{s} \quad (44)$$

ΑΡΑ ο **Χρόνος που απαιτείται γιά να φθάσει το Υλικό Σημείο στο κατώτερο σημείο Ω είναι ανεξάρτητος από το Αρχικό πλάτος ταλάντωσης .** !!!!!!!!

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΔΥΟ(2) ΥΛΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ 1 , 2 :

$\boldsymbol{\phi_1 = \frac{Pi}{3}, \phi_2 = \frac{Pi}{6}, a = 1, g = 9.80}$

> $S1 := simplify\left(subs\left(\phi = \frac{Pi}{3}\mathrm{rad}, a = 1\,\mathrm{m}, g = 9.80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, t = ts, rhs((\mathbf{36}))\right)\right)$

$$S1 := 2\cos(1.565247584\, t)\ \mathrm{m} \quad (45)$$

> $S2 := simplify\left(subs\left(\phi = \frac{Pi}{6}\mathrm{rad}, a = 1\,\mathrm{m}, g = 9.80\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}, t = ts, rhs((\mathbf{36}))\right)\right)$

$$S2 := 8\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\cos(1.565247584\, t)\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\ \mathrm{m} \quad (46)$$

<u>ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΟ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ Α .</u>

>

> $x\Sigma := \phi + \sin(\phi)$

$$x\Sigma := \phi + \sin(\phi) \quad (47)$$

> $z\Sigma := \cos(\phi)$

$$z\Sigma := \cos(\phi) \quad (48)$$

> $s\Sigma := 4 \cdot \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$

$$s\Sigma := 4\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (49)$$

> $s\Sigma 1 := 4 \cdot \sin\left(\frac{\phi 1}{2}\right)$

$$s\Sigma 1 := 4\sin\left(\frac{\phi 1}{2}\right) \quad (50)$$

> $s\Sigma 2 := 4 \cdot \sin\left(\frac{\phi 2}{2}\right)$

$$s\Sigma 2 := 4\sin\left(\frac{\phi 2}{2}\right) \quad (51)$$

> $s\Sigma 1 = 2\cos(1.565247584\, t)$

$$4\sin\left(\frac{\phi 1}{2}\right) = 2\cos(1.565247584\, t) \quad (52)$$

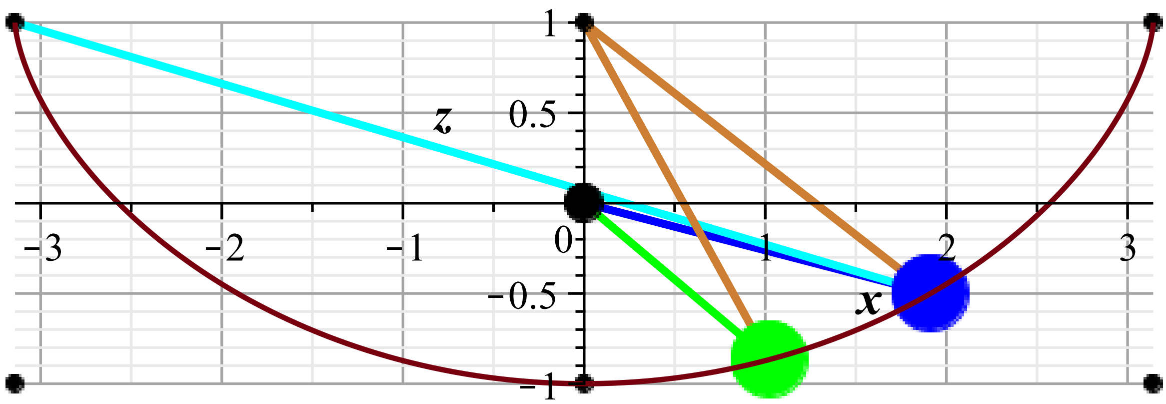
> $s\Sigma 2 = 1.035276180\cos(1.565247584\, t)$

$$4\sin\left(\frac{\phi 2}{2}\right) = 1.035276180\cos(1.565247584\, t) \quad (53)$$

> $\phi 1 := solve((\mathbf{52}), \phi 1)$

```
ϕ1 := 2. arcsin(0.5000000000 cos(1.565247584 t))                                          (54)
> ϕ2 := solve((53), ϕ2)
ϕ2 := 2. arcsin(0.2588190450 cos(1.565247584 t))                                          (55)
> xΣ1 := subs(ϕ = ϕ1, (47))
xΣ1 := 2. arcsin(0.5000000000 cos(1.565247584 t))                                         (56)
    + sin(2. arcsin(0.5000000000 cos(1.565247584 t)))
> zΣ1 := subs(ϕ = ϕ1, (48))
zΣ1 := cos(2. arcsin(0.5000000000 cos(1.565247584 t)))                                    (57)
> xΣ2 := subs(ϕ = ϕ2, (47))
xΣ2 := 2. arcsin(0.2588190450 cos(1.565247584 t))                                         (58)
    + sin(2. arcsin(0.2588190450 cos(1.565247584 t)))
> zΣ2 := subs(ϕ = ϕ2, (48))
zΣ2 := cos(2. arcsin(0.2588190450 cos(1.565247584 t)))                                    (59)
> O2 := point([-Pi, 1], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :
> O3 := point([0, 1], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :
> O4 := point([Pi, 1], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :
> O5 := point([0, -1], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :
> O6 := point([-Pi, -1], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :
> O7 := point([Pi, -1], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 10) :
> O2S1 := display(seq(line([-Pi, 1], [xΣ1, -zΣ1], color = cyan, thickness = 3), t = 0 ..16, 0.2),
    insequence = true) :
> O3S1 := display(seq(line([0, 1], [xΣ1, -zΣ1], color = gold, thickness = 3), t = 0 ..16, 0.2),
    insequence = true) :
> O3S2 := display(seq(line([0, 1], [xΣ2, -zΣ2], color = gold, thickness = 3), t = 0 ..16, 0.2),
    insequence = true) :
> O1 := point([0, 0], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 20) :
> OS1 := display(seq(line([0, 0], [xΣ1, -zΣ1], color = blue, thickness = 3), t = 0 ..16, 0.2),
    insequence = true) :
> OS2 := display(seq(line([0, 0], [xΣ2, -zΣ2], color = green, thickness = 3), t = 0 ..16, 0.2),
    insequence = true) :
> P1 := display(seq(point([xΣ1, -zΣ1], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 40), t
    = 0 ..16, 0.2), insequence = true) :
> P2 := display(seq(point([xΣ2, -zΣ2], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 40), t
    = 0 ..16, 0.2), insequence = true) :
> C := plot([1·(ϕ + sin(ϕ)), -1·(cos(ϕ)), ϕ = -Pi ..Pi], scaling = constrained, gridlines,
    axes = none, thickness = 2) :
> display(O1, O2, O3, O4, O5, O6, O7, OS1, OS2, O2S1, O3S1, O3S2, P1, P2, C, title
    = "ΙΣΟΧΡΟΝΟ-ΕΠΙ ΚΥΚΛΟΕΙΔΟΥΣ\nANIMATE\nSABBAS  GABRIHLIDHS",
    titlefont = [arial, 14, bold], labels = [x, z], labelfont = [arial, 14, bold], scaling
    = constrained, axes = normal)
```

ΙΣΟΧΡΟΝΟ-ΕΠΙ ΚΥΚΛΟΕΙΔΟΥΣ
ANIMATE
SABBAS GABRIHLIDHS



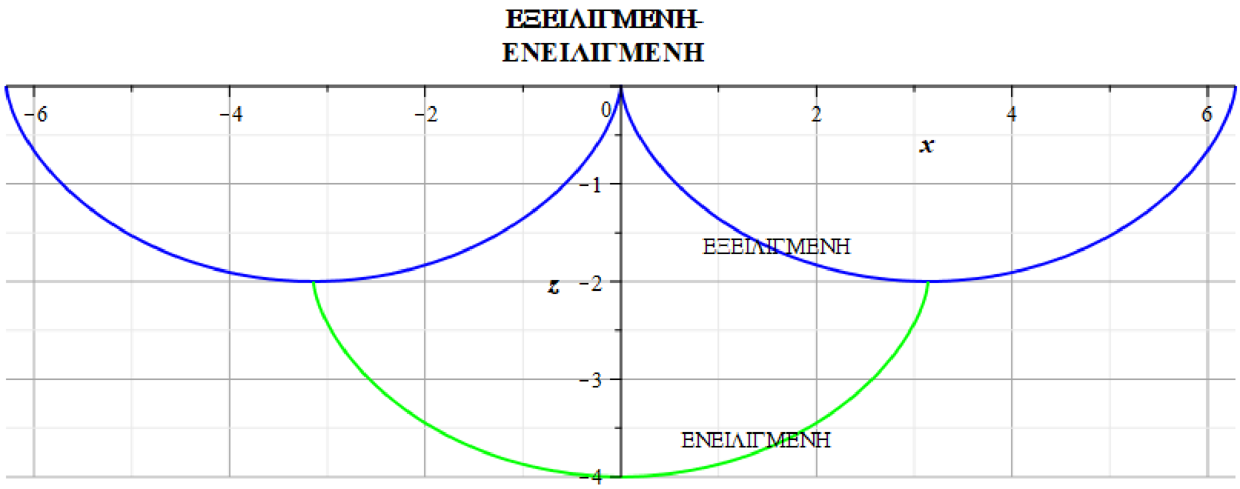
ΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ ΕΚΚΡΕΜΕΣ HUYGHENS .

ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΗ(Ορθοπεριβάλλουσα)=evolute ,Αρχική Κυκλοειδής .
ΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΗ(Εκτυλισσόμενη)=involute .

```
> A1 := plot([1·(θ − sin(θ)), -1·(1 − cos(θ)), θ = -2·Pi..2·Pi], scaling = constrained,
      gridlines, axes = none, thickness = 2, color = blue) :
```

```
> A2 := plot([1·(θ + sin(θ)), -1·(3 + cos(θ)), θ = -Pi..Pi], scaling = constrained,
      gridlines, axes = none, thickness = 2, color = green) :
```

```
> display(A1, A2, axes = normal, gridlines, title = "ΕΞΕΙΛΙΓΜΕΝΗ-\nΕΝΕΙΛΙΓΜΕΝΗ", titlefont
      = [arial, 14, bold], labels = [x, z], labelfont = [arial, 14, bold]) :
```

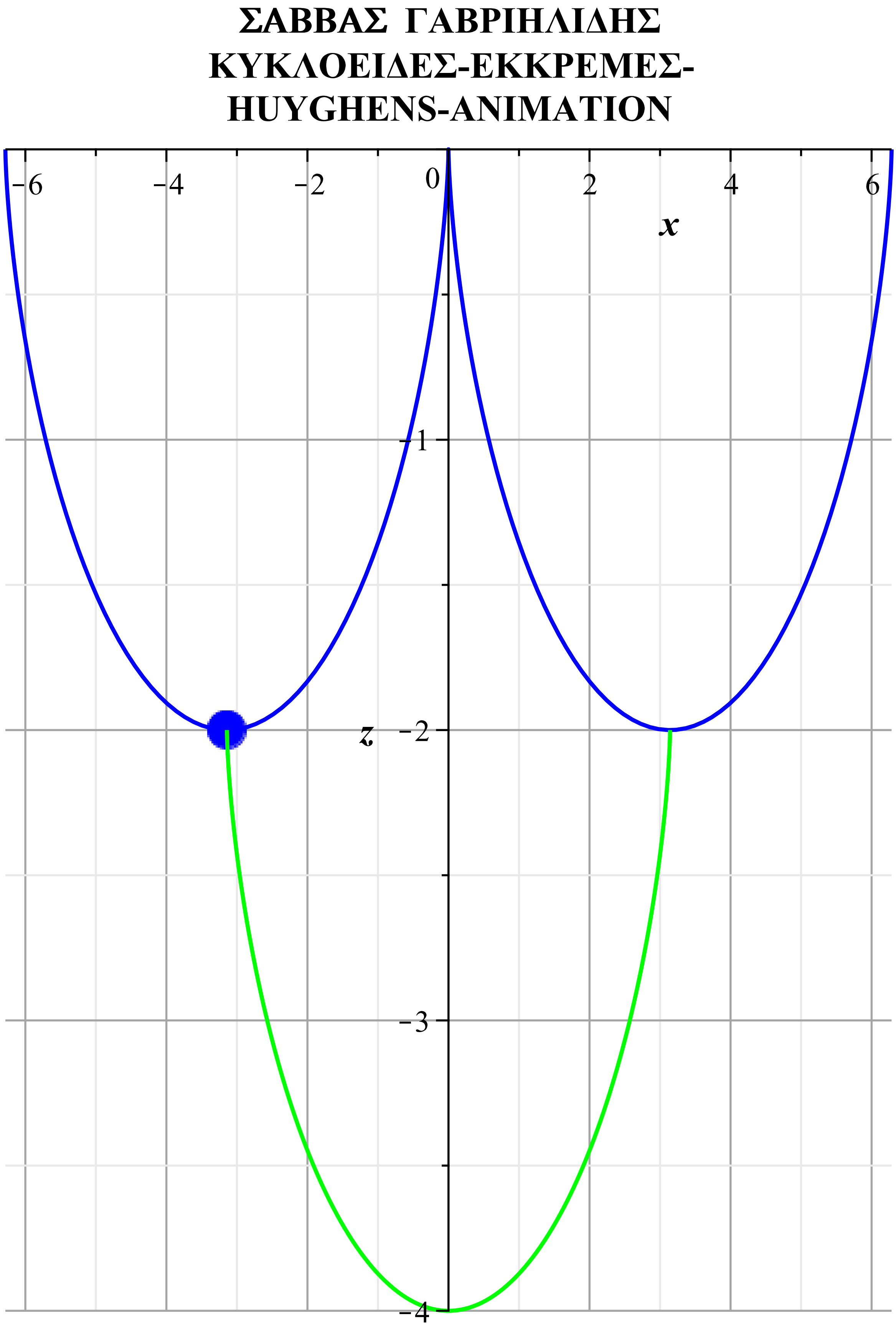



```
> A3 := animate(pointplot, [[1·(α − sin(α)), -1·(1 − cos(α))], color = red, symbol
      = solidcircle, symbolsize = 10], α = -Pi..Pi, frames = 50, trace = 9) :
```

```
> A4 := animate(pointplot, [[1·(α + sin(α)), -1·(3 + cos(α))], color = blue, symbol
      = solidcircle, symbolsize = 25], α = -Pi..Pi, frames = 50, trace = 9) :
```

```
> A5 := animate(plot, [[1·(α − sin(α)) + λ·(α + sin(α) − (α − sin(α))), -1·(1
      − cos(α)) + λ·(-1·(3 + cos(α)) - (-1·(1 − cos(α)))), λ = 0..1], color = yellow,
      thickness = 2], α = -Pi..Pi, frames = 50, trace = 9) :
```

```
> display(A1, A2, A3, A4, A5, title
      = "ΣΑΒΒΑΣ  ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-\nHUYGHENS-
      ANIMATION", titlefont = [arial, 14, bold], labels = [x, z], labelfont = [arial, 14, bold],
      scaling = unconstrained, axes = normal)
```



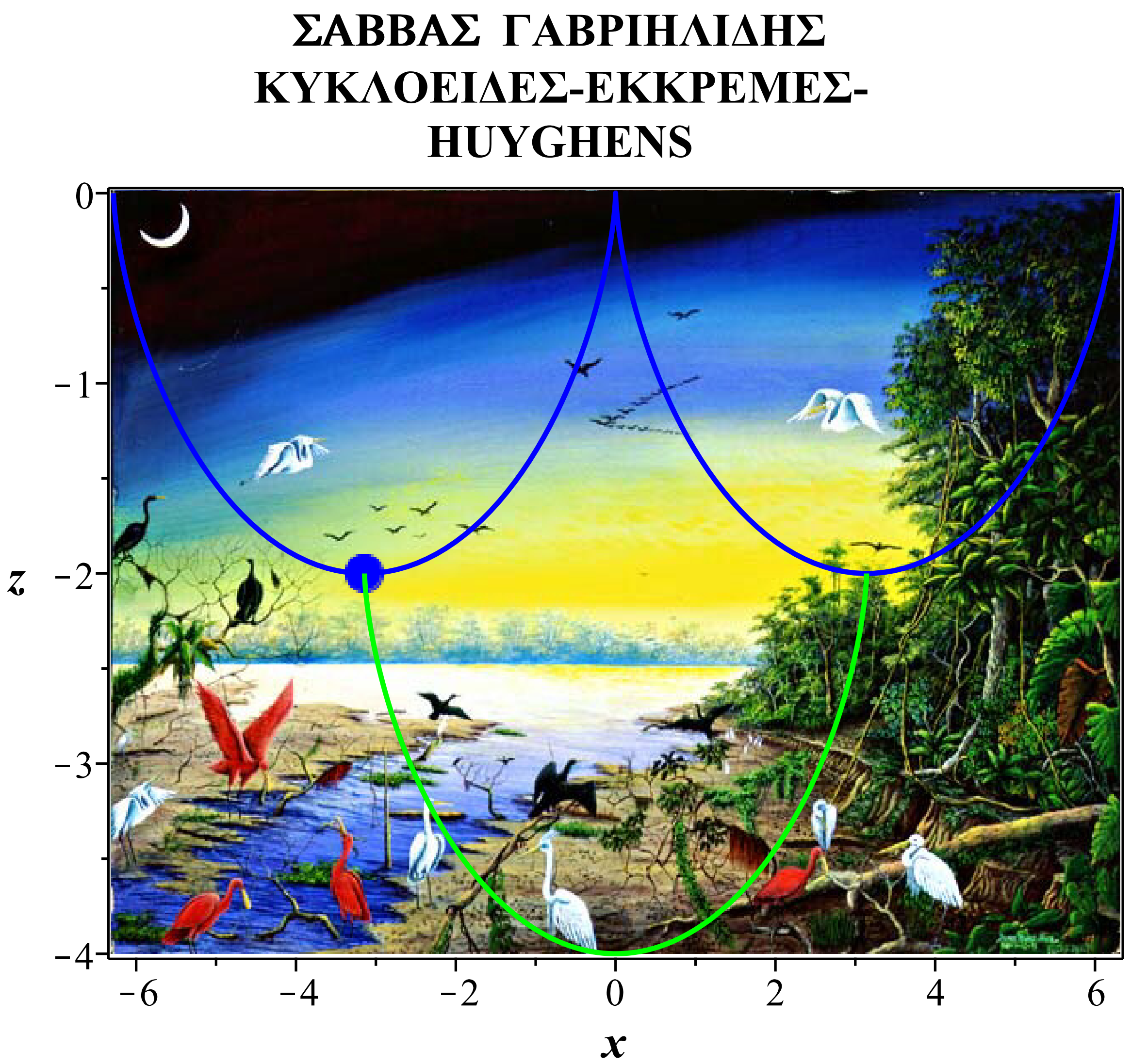
> $with(FileTools)$

[*AbsolutePath*, *AtEndOfFile*, *Basename*, *Binary*, *CanonicalPath*, *Compressed*, *Copy*, *Exists*, *Extension*, *Filename*, *Flush*, *Hash*, *IsDirectory*, *IsExecutable*, *IsLink*, *IsLockable*, *IsOpen*, *IsReadable*, *IsWritable*, *JoinPath*, *ListDirectory*, *Lock*, *MakeDirectory*, **(60)** ModificationTime, ParentDirectory, Position, Remove, RemoveDirectory, Rename, Size, SplitPath, Status, TemporaryDirectory, TemporaryFile, TemporaryFilename, Text, Unlock]

> *SABBAS* := *JoinPath*(["C:", "SPGABRIHLIDHS", "IMAGES", "BIOTOPOS.jpg"])

SABBAS := "C:\SPGABRIHLIDHS\IMAGES\BIOTOPOS.jpg" **(61)**

> *display*(A1, A2, A3, A4, A5, title = "ΣΑΒΒΑΣ ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-\nHUYGHENS", *titlefont* = [*arial*, 14, *bold*], *labels* = [*x*, *z*], *labelfont* = [*arial*, 14, *bold*], *scaling* = *constrained*, *axes* = *normal*, *background* = *SABBAS*, *gridlines* = *false*, *axes* = *boxed*, *scaling* = *unconstrained*)



> *SABBAS2* := *JoinPath*(["C:", "SPGABRIHLIDHS", "IMAGES", "LAOKRATHS-GABRIHLIDHS.jpg"])

SABBAS2 := "C:\SPGABRIHLIDHS\IMAGES\LAOKRATHS-GABRIHLIDHS.jpg" **(62)**

> *display*(A1, A2, A3, A4, A5, title = "ΛΑΟΚΡΑΤΗΣ ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-\nHUYGHENS", *titlefont* = [*arial*, 14, *bold*], *labels* = [*x*, *z*], *labelfont* = [*arial*, 14, *bold*], *scaling* = *constrained*, *axes* = *normal*, *background* = *SABBAS2*, *scaling* = *unconstrained*, *gridlines* = *false*, *axes* = *none*)

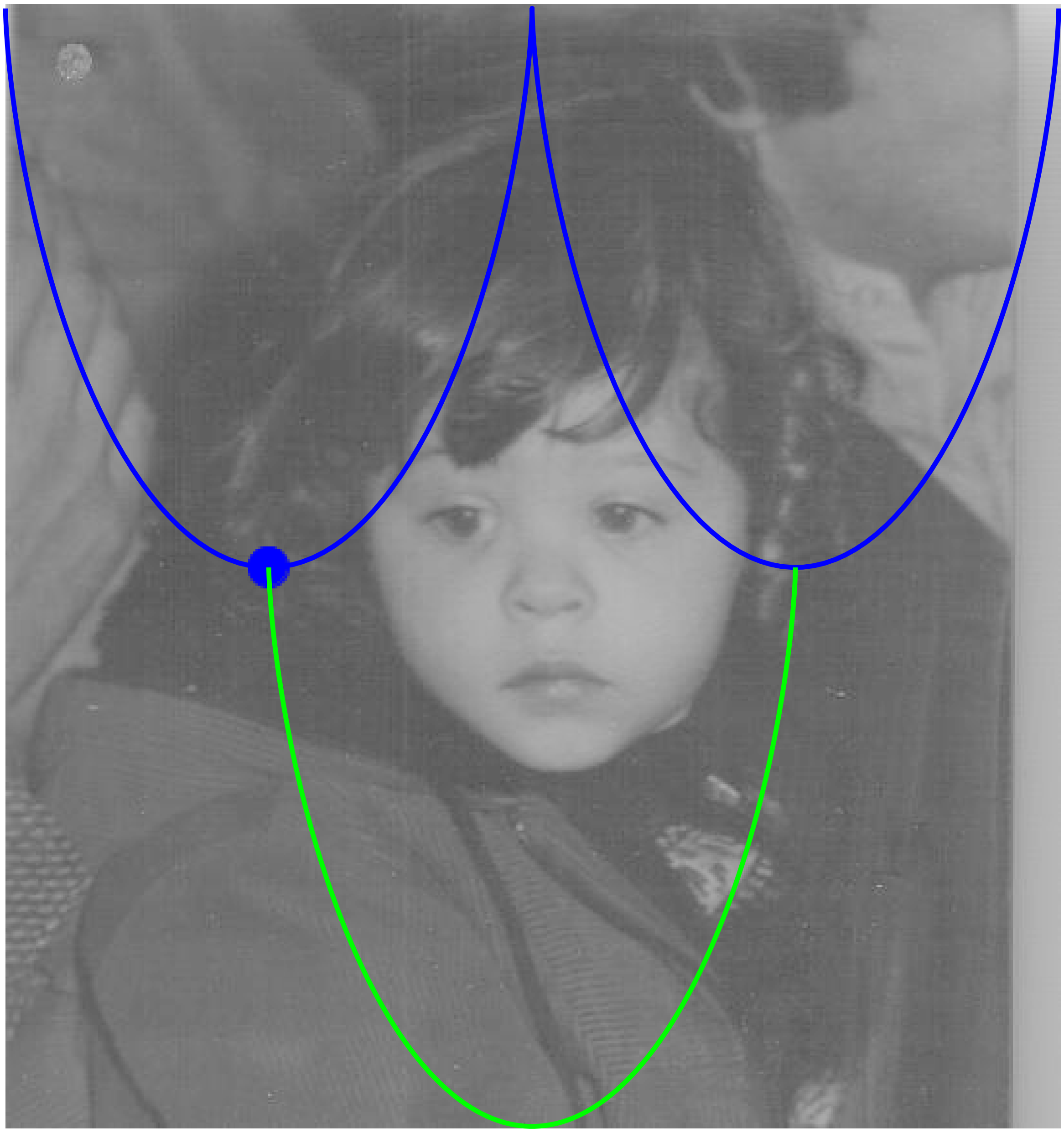
**ΛΑΟΚΡΑΤΗΣ
ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
ΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-
ΕΚΚΡΕΜΕΣ-
HUYGHENS**

> *SABBAS1* := *JoinPath*(["C:", "SPGABRIHLIDHS", "IMAGES", "PRODROMOS-GABRIHLIDHS.jpg"])

SABBAS1 := "C:\SPGABRIHLIDHS\IMAGES\PRODROMOS-GABRIHLIDHS.jpg" **(63)**

> *display*(A1, A2, A3, A4, A5, title = "ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-\nHUYGHENS", *titlefont* = [*arial*, 14, *bold*], *labels* = [*x*, *z*], *labelfont* = [*arial*, 14, *bold*], *scaling* = *constrained*, *axes* = *normal*, *background* = *SABBAS1*, *scaling* = *unconstrained*, *gridlines* = *false*, *axes* = *none*)

ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
ΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-
HUYGHENS

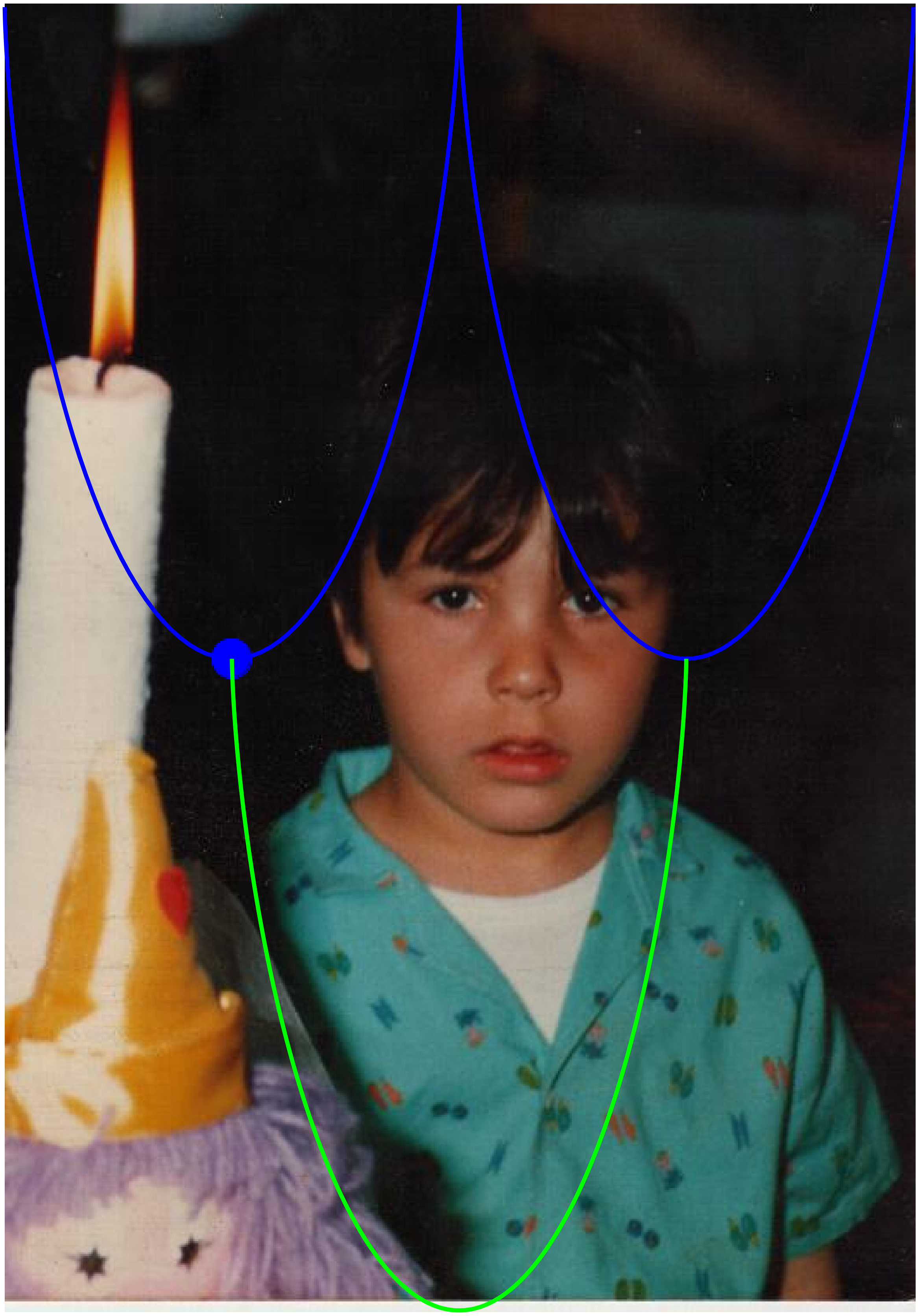


> *SABBAS3* := *JoinPath*(["C:", "SPGABRIHLIDHS", "IMAGES", "DHMHTRHS-GABRIHLIDHS.jpg"])

SABBAS3 := "C:\SPGABRIHLIDHS\IMAGES\DHMHTRHS-GABRIHLIDHS.jpg" **(64)**

> *display*(A1, A2, A3, A4, A5, title = "ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-\nHUYGHENS", *titlefont* = [*arial*, 14, *bold*], *labels* = [*x*, *z*], *labelfont* = [*arial*, 14, *bold*], *scaling* = *constrained*, *axes* = *normal*, *background* = *SABBAS3*, *scaling* = *unconstrained*, *gridlines* = *false*, *axes* = *none*)

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
ΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-
HUYGHENS



> *SABBAS4* := *JoinPath*(["C:", "SPGABRIHLIDHS", "IMAGES",

"SABBAS-GABRIHLIDHS.jpg"])

SABBAS4 := "C:\SPGABRIHLIDHS\IMAGES\SABBAS-GABRIHLIDHS.jpg" **(65)**

> *display*(A1, A2, A3, A4, A5, title = "ΣΑΒΒΑΣ Δ. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-\nHUYGHENS", *titlefont* = [*arial*, 14, *bold*], *labels* = [*x*, *z*], *labelfont* = [*arial*, 14, *bold*], *scaling* = *constrained*, *axes* = *normal*, *background* = *SABBAS4*, *scaling* = *unconstrained*, *gridlines* = *false*, *axes* = *boxed*)

ΣΑΒΒΑΣ Δ. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
ΚΥΚΛΟΕΙΔΕΣ-ΕΚΚΡΕΜΕΣ-
HUYGHENS