```
> with(plots) :
> with(plottools) :
> with(DEtools) :
> with(LinearAlgebra) :
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
```

«un seul battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut déclencher une tempête au Texas».

Ένα μονάχα φτερούγισμα μιάς πεταλούδας στην Βραζιλία μπορεί να προκαλέσει έναν τυφώνα στο Τέξας .

>

Απόσπασμα από το βιβλίο του Καθηγητή Δημ. Σουρλά "ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ με τη χρήση του Maple " .

7.4. Οι Εξισώσεις Lorenz και το Κύκλωμα Chua.

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα εφαρμογών των τρισδιάστατων αυτόνομων συστημάτων στον πραγματικό κόσμο. Αυτά τα συστήματα υπακούουν στην θεωρία ύπαρξης και μοναδικότητας του κεφαλαίου 1 αλλά η δυναμική μπορεί να είναι πολύ πιο πολύπλοκη από την δισδιάστατη περίπτωση. Τα ακόλουθα παραδείγματα, που έχουμε πάρει από την μετεωρολογία και την θεωρία ηλεκτρικών κυκλωμάτων, έχουν ερευνηθεί ευρέως τα τελευταία χρόνια:

7.4.1. Οι εξισώσεις του Lorenz:

Το 1963, ο μετεωρολόγος του MIT Edward Lorenz κατασκεύασε ένα αρκετά απλοποιημένο μοντέλο ενός μεταδιδόμενου ρευστού. Αυτό το απλό μοντέλο παρουσιάζει επίσης μια ευρεία ποικιλία συμπεριφοράς και για κάποιες τιμές των παραμέτρων είναι χαοτικό. Το σύστημα δίνεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{7.4}$$

όπου το x μετρά το ποσοστό της μεταδιδόμενης αναταραχής, το y μετρά την οριζόντια μεταβολή της θερμοκρασίας, το z μετρά την κατακόρυφη μεταβολή της θερμοκρασίας, σ είναι ο αριθμός του Prandtl, r είναι ο αριθμός του Rayleigh και b είναι ένας βαθμωτός παράγοντας. Ο αριθμός του Prandtl σχετίζεται με το ιξώδες του ρευστού και ο αριθμός του Rayleigh με την διαφορά θερμοκρασίας του πάνω με το κάτω μέρος της στήλης στην οποία βρίσκεται το ρευστό. Ο Lorenz μελέτησε το σύστημα όταν $\sigma=10$ και $b=\frac{8}{3}$.

Το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα εξαιρετικά απλοποιημένο μοντέλο για τον καιρό. Το εκπληκτικό αποτέλεσμα που προέκυψε από τον Lorenz είναι το ευρέως τώρα καλούμενο ως ***φαινόμενο της πεταλούδας***. Ακόμη και αυτό το πολύ απλό μοντέλο για τον καιρό μπορεί να παράγει χαοτικό φαινόμενο. Μιας και το σύστημα είναι ευαίσθητο στις αρχικές συνθήκες, μικρές αλλαγές στις ταχύτητες του ανέμου, για παράδειγμα, που παράγεται από τα φτερά μιας πεταλούδας, μπορεί να αλλάξει ικανά τα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, μια πεταλούδα που κουνά τα φτερά της στην Βρετανία θα μπορούσε να προκαλέσει ή να αποτρέψει έναν τυφώνα από το να χτυπήσει τις Μπαχάμες στο κοντινό μέλλον. Φυσικά, υπάρχουν πολύ περισσότερες μεταβλητές που θα πρέπει να λάβουμε υπ᾽ όψιν όταν προσπαθούμε να μοντελοποιήσουμε τα συστήματα του καιρού και αυτό το απλοποιημένο μοντέλο μας δείχνει κάποια από τα προβλήματα που έχουν να αντιμετωπίσουν οι μετερεωλόγοι.

Σημειώστε ότι τα περισσότερα μη γραμμικά συστήματα παρουσιάζουν συνήθως συμπεριφορά ευσταθούς κατάστασης, επομένως είναι πιθανό να προβλέψουμε, για παράδειγμα, τον καιρό, την κίνηση των πλανητών, την εξάπλωση μιας επιδημίας, την κίνησης ενός εξαναγκασμένου εκκρεμούς ή τους χτύπους της ανθρώπινης καρδιάς. Όμως, τα μη γραμμικά συστήματα μπορούν ακόμη να παρουσιάσουν την χαοτική συμπεριφορά, εκεί όπου η πρόβλεψη γίνεται αδύνατη.

Ακολουθούν μερικές απλές ιδιότητες των εξισώσεων Lorenz:

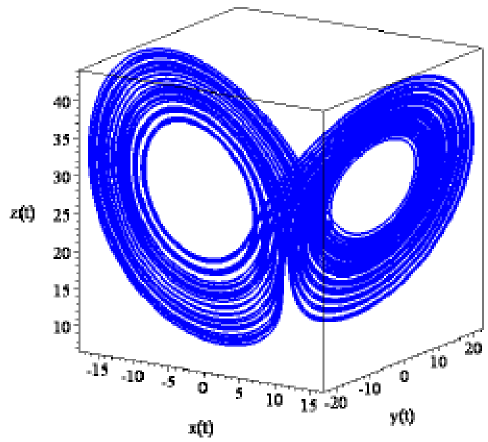
1. Το σύστημα (7.4) έχει φυσική συμμετρία $(x,y,z)\to(-x,-y,-z)$.
2. Ο άξονας z είναι αμετάβλητος.
3. Η ροή είναι συστολική κατ᾽ όγκο αφού $\operatorname{div}\mathbf{F}=-(\sigma+b+1)<0$, όπου $\mathbf{F}$ είναι το διανυσματικό πεδίο: $\mathbf{F}=\sigma(y-x)\mathbf{i}+(rx-y-xz)\mathbf{j}+(xy-bz)\mathbf{k}$.
4. Εάν $0<r<1$, η αρχή είναι το μόνο κρίσιμο σημείο και είναι ολικός ελκυστής.
5. Εάν $r=1$, υπάρχει διακλάδωση και υπάρχουν δύο ακόμη κρίσιμα σημεία στα $c_1=\left(\sqrt{b(r-1)},\sqrt{b(r-1)},r-1\right)$ και $c_2=\left(-\sqrt{b(r-1)},-\sqrt{b(r-1)},r-1\right)$.
6. Στο $r=r_H\approx 13.93$, υπάρχει ομοκλινική διακλάδωση και το σύστημα εισέρχεται σε μια κατάσταση μεταβατικού χάους.
7. Στο $r\approx 24.06$, σχηματίζεται ένας παράξενος ελκυστής.
8. Εάν $0<r<r_0$, όπου $r_0\approx 24.74$, η αρχή είναι ασταθής και τα c_1 και c_2 είναι και τα δύο ευσταθή.
9. Στο $r>r_0$, τα c_1 και c_2 χάνουν την ευστάθειά τους με την απορρόφηση ενός ασταθούς οριακού κύκλου από μία υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf.

Ένας παράξενος ελκυστής υπάρχει στο ακόλουθο σχήμα:

```
> restart;with(DEtools):with(plots):
> σ:=10:b:=8/3:r:=28:
>Lorenz:=diff(x(t),t)=σ*(y(t)-x(t)),diff(y(t),t)=r*x(t)-
y(t)-x(t)*z(t),diff(z(t),t)=x(t)*y(t)-b*z(t);
```

$$Lorenz := \frac{d}{dt}\mathrm{x}(t) = 10\ \mathrm{y}(t) - 10\ \mathrm{x}(t), \frac{d}{dt}\mathrm{y}(t) = 28\ \mathrm{x}(t) - \mathrm{y}(t) - \mathrm{x}(t)\ \mathrm{z}(t),$$
$$\frac{d}{dt}\mathrm{z}(t) = \mathrm{x}(t)\ \mathrm{y}(t) - \frac{8}{3}\mathrm{z}(t)$$

```
>DEplot3d({Lorenz},{x(t),y(t),z(t)},t=50..120,
[[x(0)=1,y(0)=1,z(0)=1]],scene=[x(t),y(t),z(t)],stepsize=0.
005,font=[TIMES,ROMAN,14],linecolor=blue,orientation=[-
57,75]);
```



Σχήμα 7.10: Ένας παράξενος ελκυστής για το σύστημα Lorenz όταν σ=10, b=8/3 και r=28.

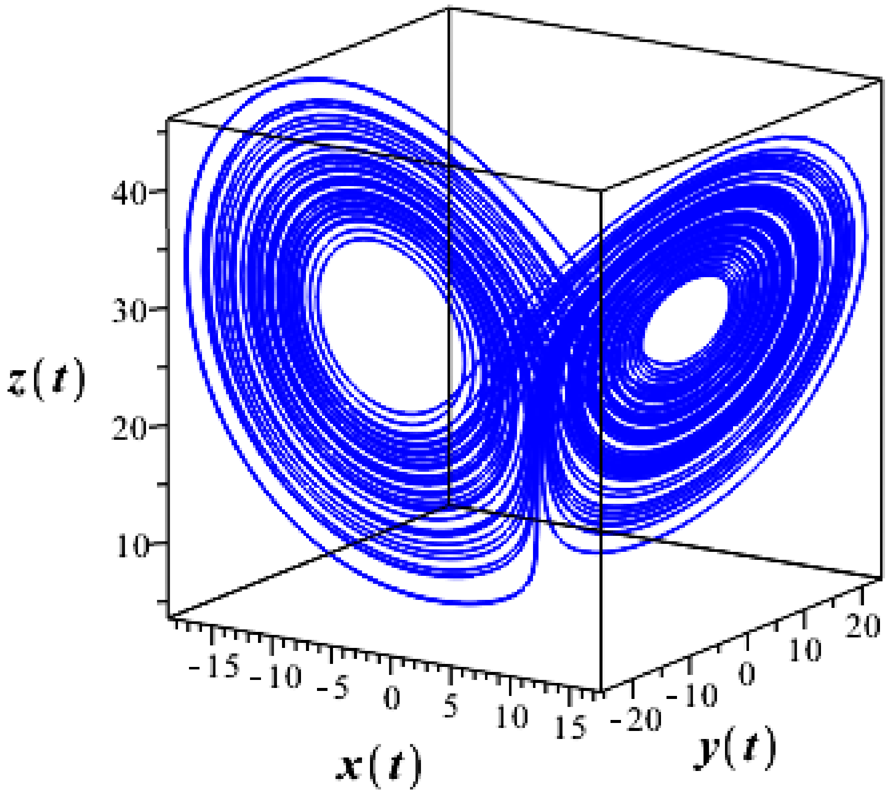
Οι τροχιές τυλίγονται γύρω από τα δύο κρίσιμα σημεία c_1 και c_2 με έναν εμφανώς τυχαίο και απρόβλεπτο τρόπο. Ο παράξενος ελκυστής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Η τροχιά είναι μη περιοδική.
- Η τροχιά παραμένει μόνιμα στον ελκυστή (ο ελκυστής είναι αναλλοίωτος).
- Η γενική μορφή είναι ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών.
- Η ακολουθία των τυλιγμάτων είναι ευαίσθητη στις αρχικές συνθήκες.
- Ο ελκυστής έχει φράκταλ δομή.

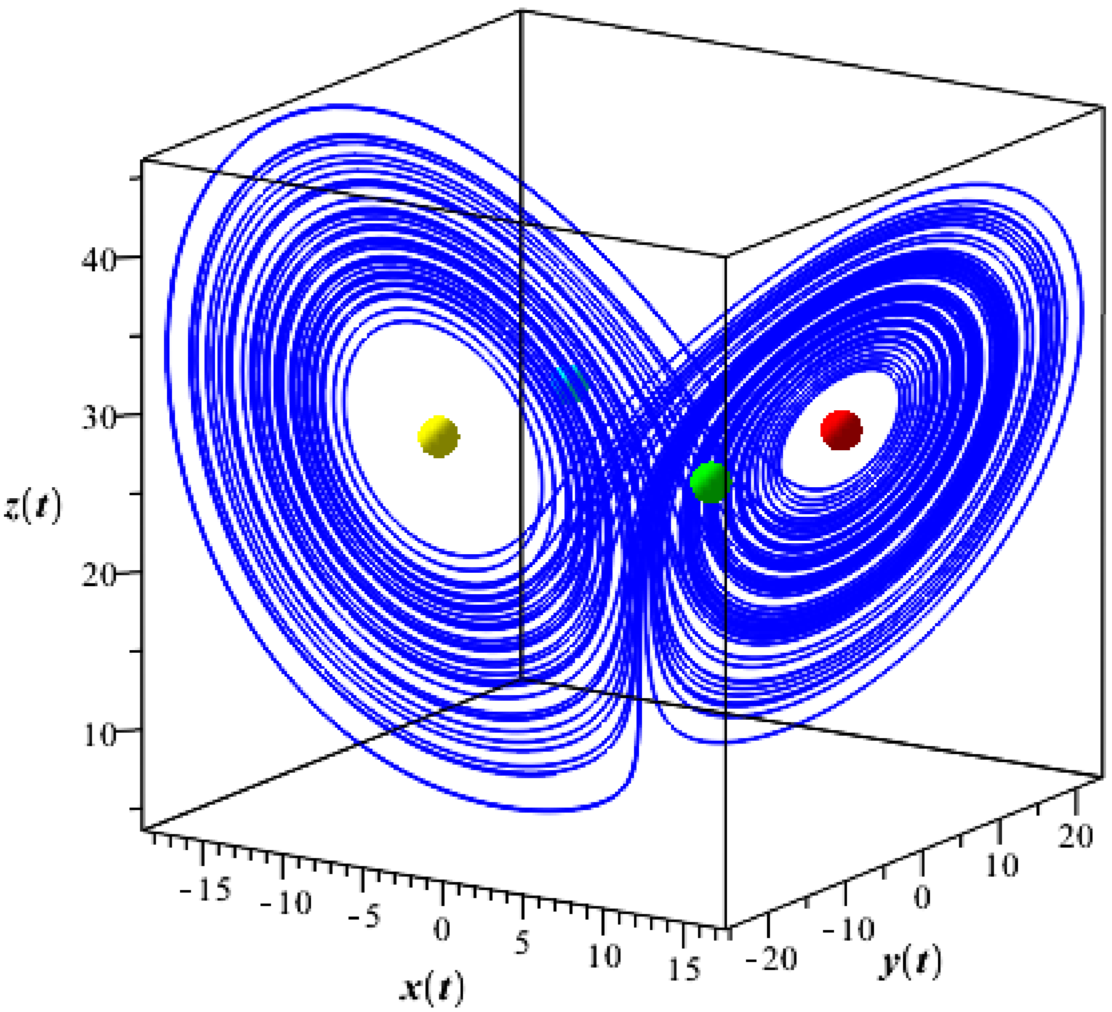
Μια παραλλαγή του μοντέλου του Lorenz προτάθηκε πρόσφατα από τους Guanrong Chen και Tetsushi Ueta. Οι εξισώσεις είναι οι:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= (r-\sigma)x + ry - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{7.5}$$

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
3D-ΠΑΡΑΞΕΝΟΣ ΕΛΚΥΣΤΗΣ LORENZ
Γιά σ=10,b=8/3,r=28 me odeplot



ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
3D-ΠΑΡΑΞΕΝΟΣ ΕΛΚΥΣΤΗΣ LORENZ
Γιά σ=10,b=8/3,r=28



>

>

> $Lorenz := [diff(x(t), t) = \sigma \cdot (y(t) - x(t)), diff(y(t), t) = r \cdot x(t) - y(t) - x(t) \cdot z(t), diff(z(t), t) = x(t) \cdot y(t) - b \cdot z(t)]$

$$Lorenz := [\dot{x}(t) = \sigma\,(y(t) - x(t)), \dot{y}(t) = r\,x(t) - y(t) - x(t)\,z(t), \dot{z}(t) = x(t)\,y(t) - b\,z(t)] \qquad (1)$$

>

1. $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$

>

> $Lorenz1 := subs\left(\left\{\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28\right\}, Lorenz\right)$

$$Lorenz1 := \left[\dot{x}(t) = 10\,y(t) - 10\,x(t), \dot{y}(t) = 28\,x(t) - y(t) - x(t)\,z(t), \dot{z}(t) = x(t)\,y(t) - \frac{8\,z(t)}{3}\right] \quad (2)$$

> $P := rhs(Lorenz1[1])$

$$P := 10\,y(t) - 10\,x(t) \quad (3)$$

> $Q := rhs(Lorenz1[2])$

$$Q := 28\,x(t) - y(t) - x(t)\,z(t) \quad (4)$$

> $R := rhs(Lorenz1[3])$

$$R := x(t)\,y(t) - \frac{8\,z(t)}{3} \quad (5)$$

> $diff(P, x(t))$

$$-10 \quad (6)$$

> $diff(P, y(t))$

$$10 \quad (7)$$

> $diff(P, z(t))$

$$0 \quad (8)$$

> $diff(Q, x(t))$

$$28 - z(t) \quad (9)$$

> $diff(Q, y(t))$

$$-1 \quad (10)$$

> $diff(Q, z(t))$

$$-x(t) \quad (11)$$

> $diff(R, x(t))$

$$y(t) \quad (12)$$

> $diff(R, y(t))$

$$x(t) \quad (13)$$

> $diff(R, z(t))$

$$-\frac{8}{3} \quad (14)$$

> $J := \begin{bmatrix} (6) & (7) & (8) \\ (9) & (10) & (11) \\ (12) & (13) & (14) \end{bmatrix}$

$$J := \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 - z(t) & -1 & -x(t) \\ y(t) & x(t) & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

> $whattype(J)$

$$Matrix \quad (16)$$

ΠΕΝΤΕ ΚΡΙΣΙΜΑ ΣΗΜΕΙΑ (5).

> $solve(\{P = 0, Q = 0, R = 0\}, \{x(t), y(t), z(t)\})$

$$\{x(t) = 0, y(t) = 0, z(t) = 0\}, \{x(t) = 6\,RootOf(\_Z^2 - 2), y(t) = 6\,RootOf(\_Z^2 - 2), z(t) = 27\} \quad (17)$$

> $A1 := [rhs((\mathbf{17})[1][1]), rhs((\mathbf{17})[1][2]), rhs((\mathbf{17})[1][3])]$

$$A1 := [0, 0, 0] \tag{18}$$

> $allvalues(rhs((\mathbf{17})[2][1]))$

$$6\sqrt{2}, -6\sqrt{2} \tag{19}$$

> $allvalues(rhs((\mathbf{17})[2][2]))$

$$6\sqrt{2}, -6\sqrt{2} \tag{20}$$

> $A2 := [(\mathbf{19})[1], (\mathbf{20})[1], rhs((\mathbf{17})[2][3])]$

$$A2 := \left[6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27\right] \tag{21}$$

> $A3 := [(\mathbf{19})[1], (\mathbf{20})[2], rhs((\mathbf{17})[2][3])]$

$$A3 := \left[6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27\right] \tag{22}$$

> $A4 := [(\mathbf{19})[2], (\mathbf{20})[1], rhs((\mathbf{17})[2][3])]$

$$A4 := \left[-6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27\right] \tag{23}$$

> $\mathrm{A5} := [(\mathbf{19})[2], (\mathbf{20})[2], rhs((\mathbf{17})[2][3])]$

$$A5 := \left[-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27\right] \tag{24}$$

>

> $JA1 := subs(\{x(t) = A1[1], y(t) = A1[2], z(t) = A1[3]\}, J)$

$$JA1 := \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \tag{25}$$

> $Eigenvalues(JA1)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ -\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{1201}}{2} \\ -\frac{11}{2} + \frac{\sqrt{1201}}{2} \end{bmatrix} \tag{26}$$

> $Eigenvectors(JA1)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{11}{2} + \frac{\sqrt{1201}}{2} \\ -\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{1201}}{2} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{10}{\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{1201}}{2}} & \frac{10}{\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{1201}}{2}} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

>

1- 3D-Διάγραμμα φάσης ΜΕ DEplot3d .

>

> $\boldsymbol{ics := [x(0) = 1.0, y(0) = 1.0, z(0) = 1.0]}$

$$ics := [x(0) = 1.0, y(0) = 1.0, z(0) = 1.0] \tag{28}$$

>

> $p1 := DEplot3d(Lorenz1, [\mathrm{x}(t), \mathrm{y}(t), z(t)], \mathrm{t} = 50..120, [ics], \mathrm{maxfun} = 500000, stepsize$

= 0.005, linecolor = blue, thickness = 1, labels = [x(t), y(t), $z(t)$], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 12], *title* = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\n3D-ΠΑΡΑΞΕΝΟΣ ΕΛΚΥΣΤΗΣ LORENZ\nΓιά σ=10,b=8/3,r=28", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*]) :

>

> s1 := *point*(A1, symbol = solidcircle, symbolsize = 30, color = blue) :

> *s2* := *point*(A2, symbol = solidcircle, symbolsize = 30, color = red) :

> s3 := *point*(A3, symbol = solidcircle, symbolsize = 30, color = green) :

> s4 := *point*(A4, symbol = solidcircle, symbolsize = 30, color = cyan) :

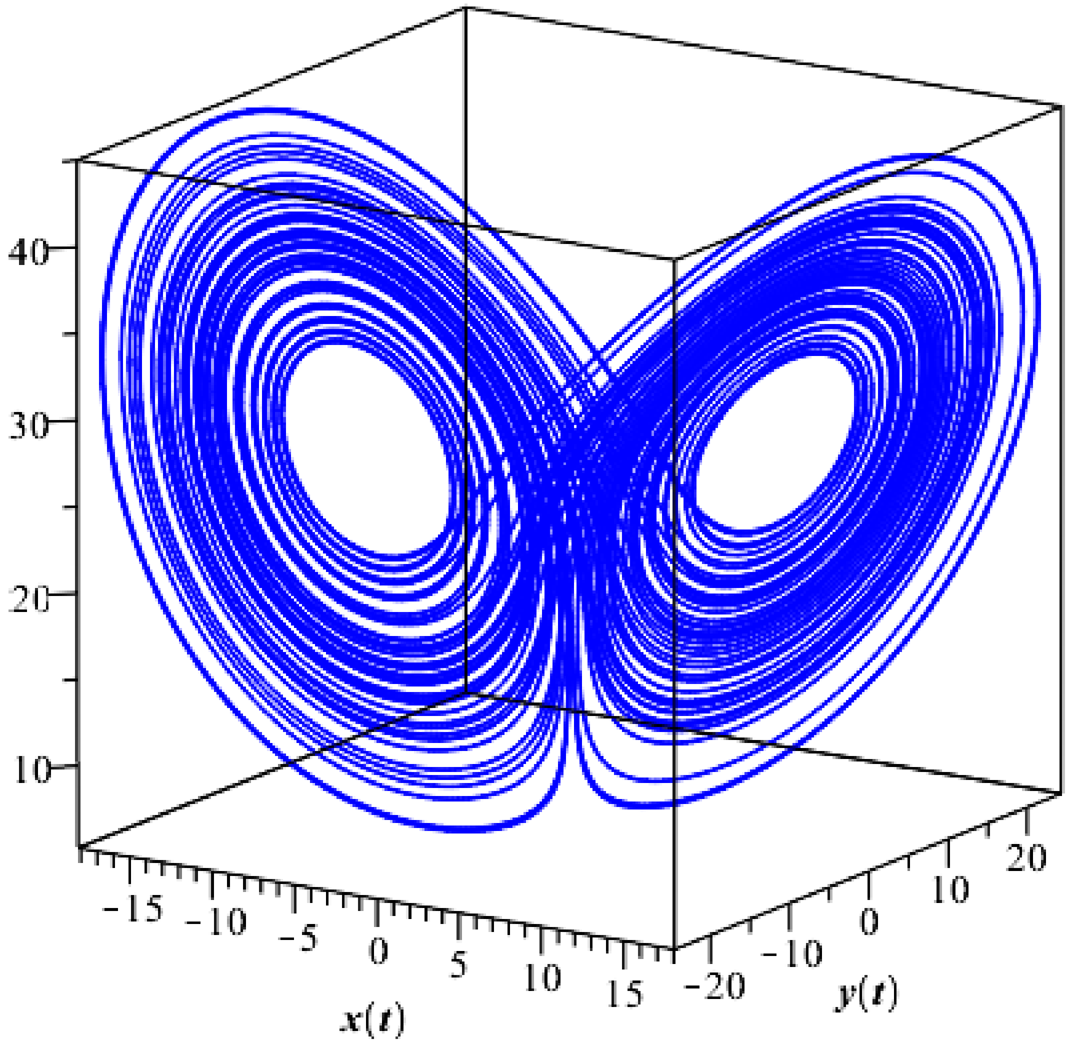
> s5 := *point*(A5, symbol = solidcircle, symbolsize = 30, color = yellow) :

>

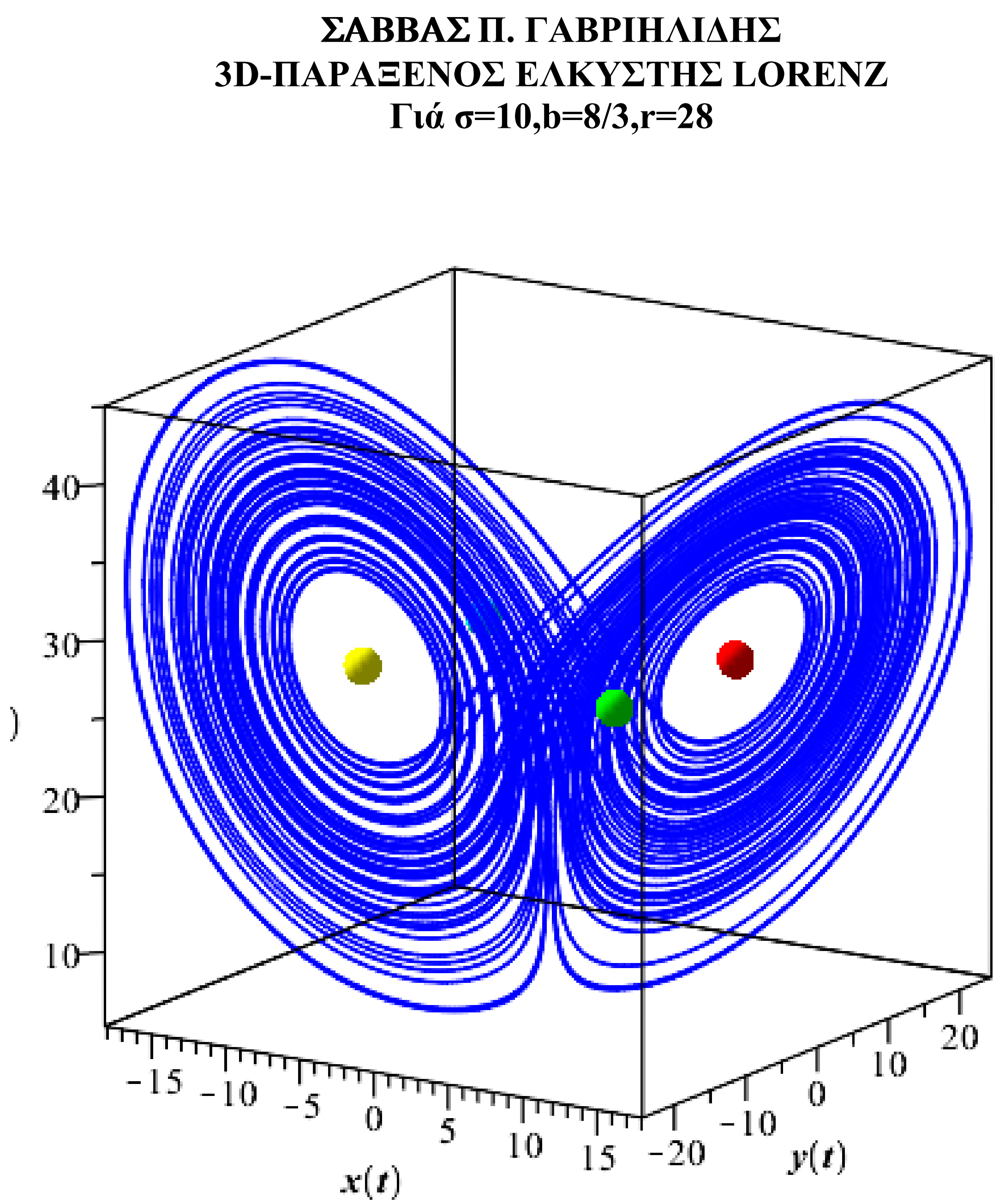
>

> *display*(*p1*, *orientation* = [−57, 75, 0])

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
3D-ΠΑΡΑΞΕΝΟΣ ΕΛΚΥΣΤΗΣ LORENZ
Γιά σ=10,b=8/3,r=28



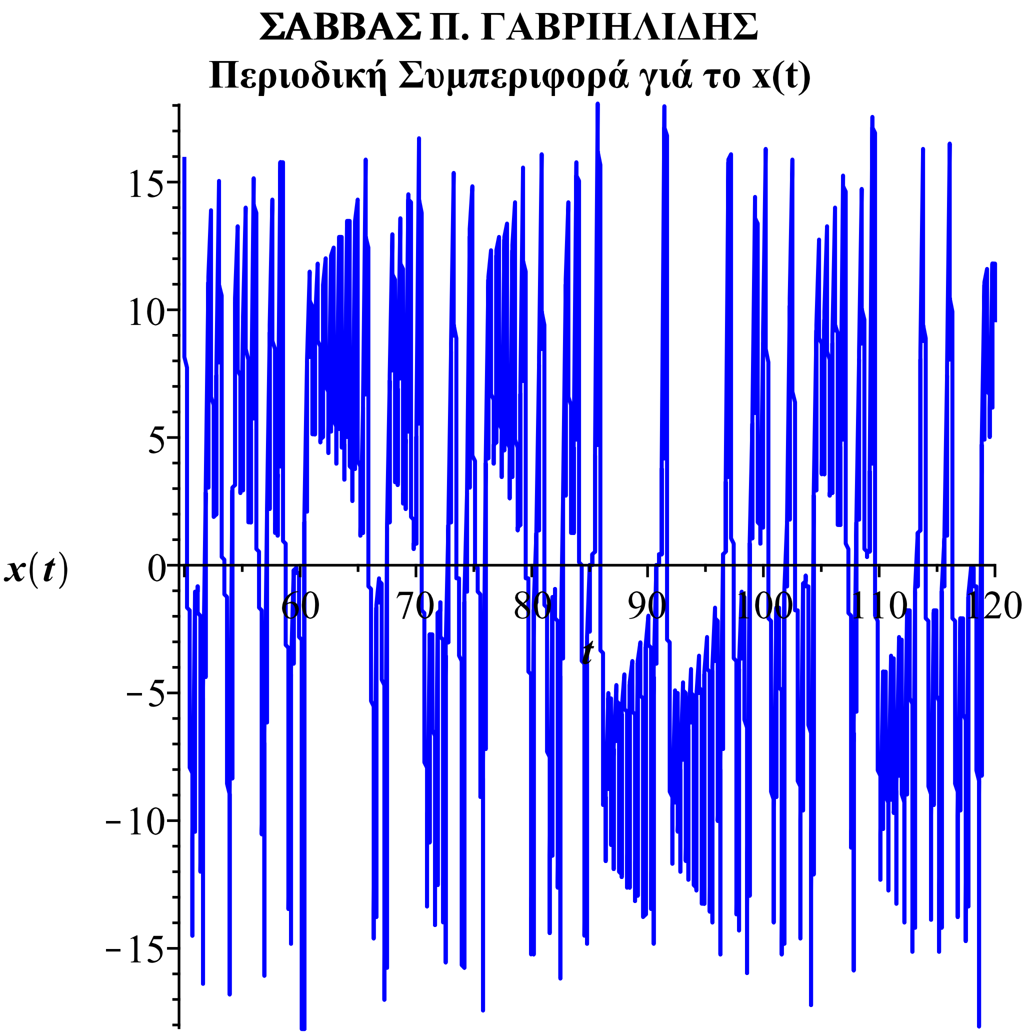
> *display*(*p1*, *s1*, *s2*, *s3*, *s4*, *s5*, *orientation* = [−57, 75, 0])



1-x(t). Περιοδική Συμπεριφορά γιά το x(t) ΜΕ DEplot .

> *p1a* := *DEplot*(*Lorenz1*, [x(t), y(t), *z*(*t*)], t = 50 ..120, [*ics*], stepsize = 0.005, maxfun = 500000, *linecolor* = blue, thickness = 1, scene = [t, x(t)], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 12], *title* = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΠεριοδική Συμπεριφορά γιά το x(t)", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*]) :

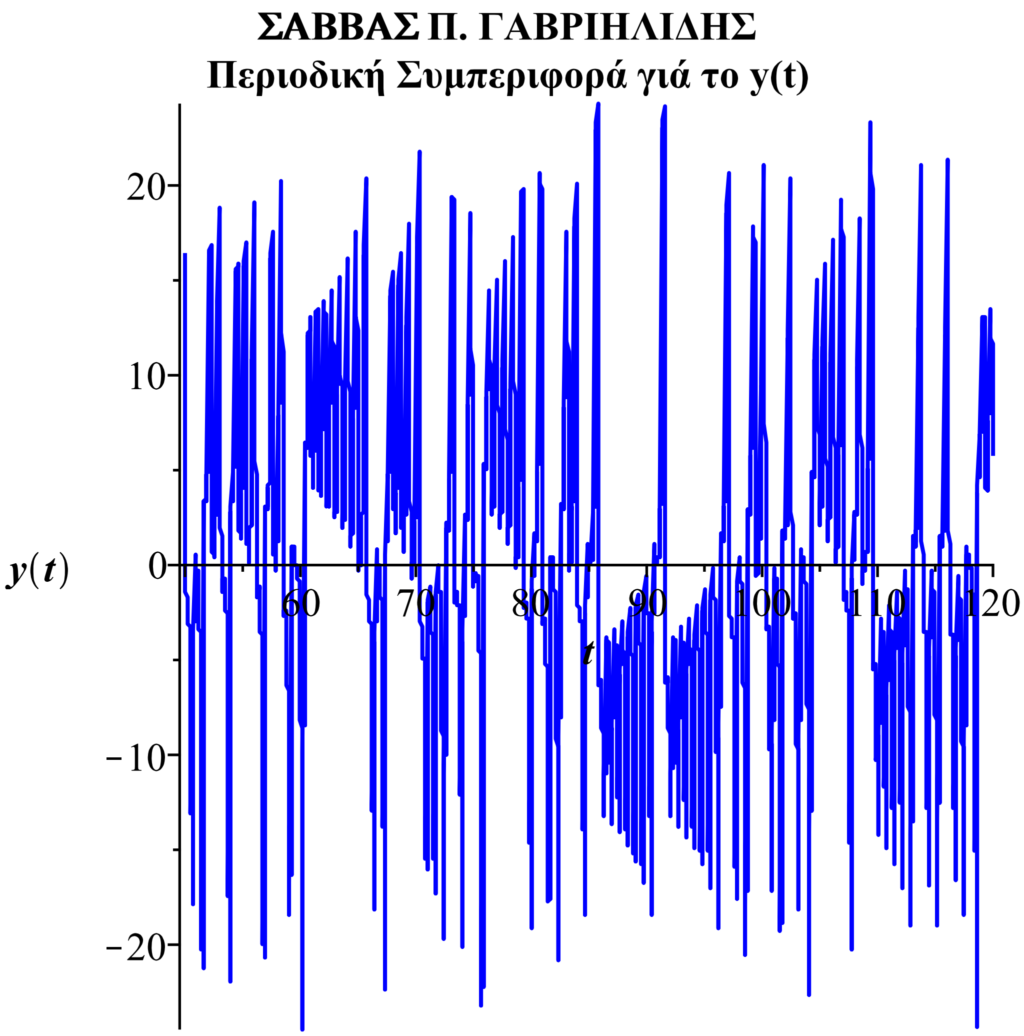
> *display*(*p1a*)



1-y(t). Περιοδική Συμπεριφορά γιά το y(t) ME DEplot .

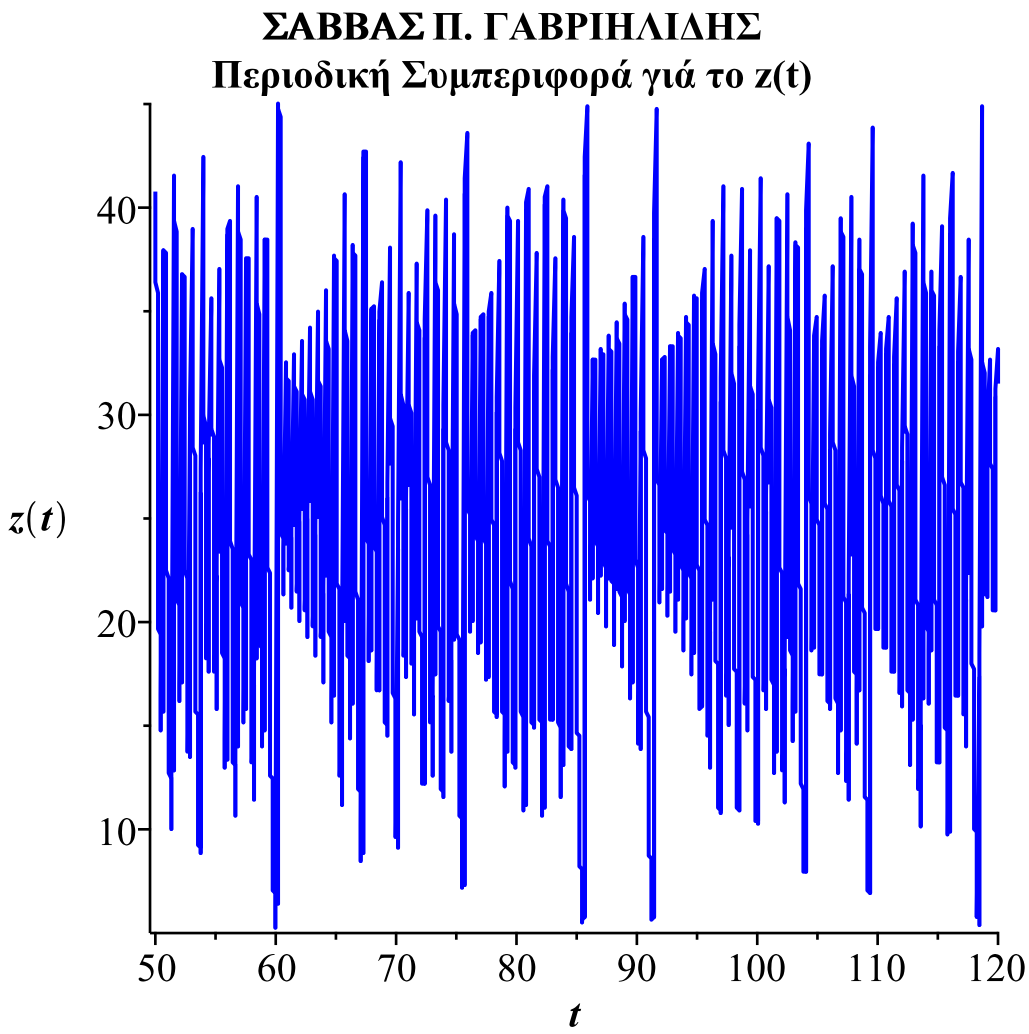
> *p1b* := *DEplot*(*Lorenz1*, [x(t), y(t), *z*(*t*)], t = 50 ..120, [*ics*], stepsize = 0.005, maxfun = 500000, linecolor = blue, thickness = 1, scene = [t, y(t)], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 12], *title* = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΠεριοδική Συμπεριφορά γιά το y(t)", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*]) :

> *display*(*p1b*)



1-z(t). Περιοδική Συμπεριφορά γιά το z(t) ME DEplot .

```
> p1c := DEplot(Lorenz1, [x(t), y(t), z(t)], t = 50 ..120, [ics], stepsize = 0.005, maxfun
      = 500000, linecolor = blue, thickness = 1, scene = [t, z(t)], labelfont = [arial, bold, 12],
    title = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΠεριοδική Συμπεριφορά γιά το z(t)", titlefont
      = [arial, 12, bold]) :
> display(p1c)
```



\>

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΑ [ ]. maxfun 500000 !!!!!

ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ .

\> $\boldsymbol{Lorenz1a := \dot{x}(t) = 10\, y(t) - 10\, x(t), \dot{y}(t) = 28\, x(t) - y(t) - x(t)\, z(t), \dot{z}(t) = x(t)\, y(t) - \frac{8\, z(t)}{3}}$

$$Lorenz1a := \dot{x}(t) = 10\, y(t) - 10\, x(t), \dot{y}(t) = 28\, x(t) - y(t) - x(t)\, z(t), \dot{z}(t) = x(t)\, y(t) - \frac{8\, z(t)}{3} \quad \textbf{(29)}$$

\> $icsa := x(0) = 1.0, y(0) = 1.0, z(0) = 1.0$

$$icsa := x(0) = 1.0, y(0) = 1.0, z(0) = 1.0 \quad \textbf{(30)}$$

\> *sola* := *dsolve*({*Lorenz1a*, *icsa*}, {*x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*) }, *numeric*, ***maxfun* = 500000**, *output* = *listprocedure*)

sola := [*t* = **proc**(*t*) ... **end proc**, *x*(*t*) = **proc**(*t*) ... **end proc**, *y*(*t*) = **proc**(*t*) **(31)**

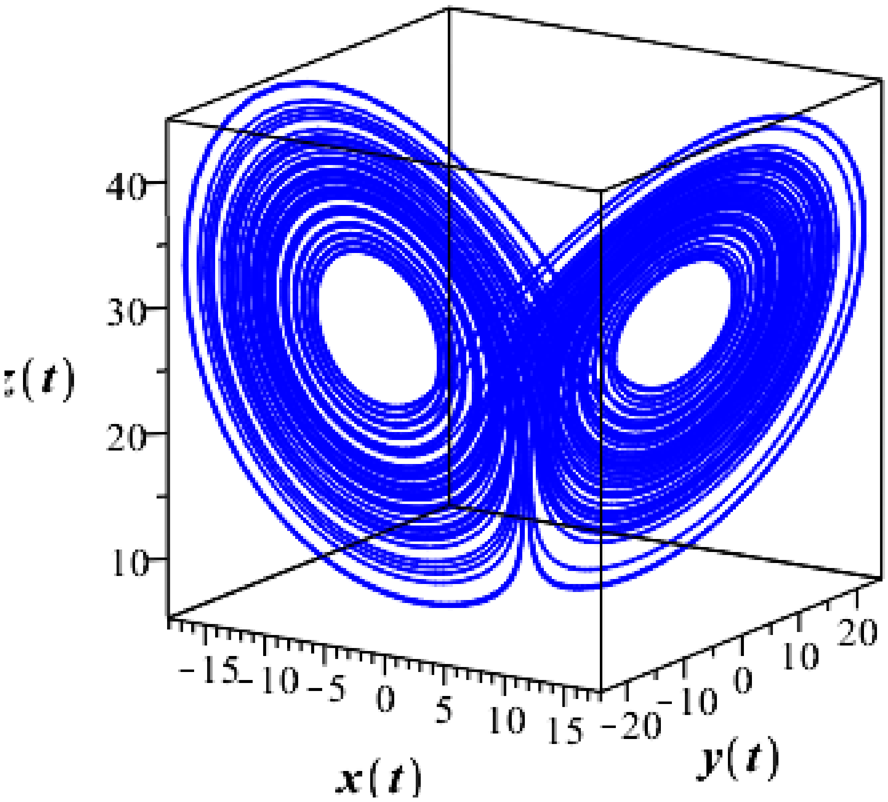
...

end proc, *z*(*t*) = **proc**(*t*) ... **end proc**]

1- 3D-Διάγραμμα φάσης ΜΕ odeplot .

\> *odeplot*(*sola*, [*x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*)], 50 ..120, *color* = *blue*, *thickness* = 1, *labels* = [*x*(*t*), *y*(*t*), *z*(*t*)], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\n3D−ΠΑΡΑΞΕΝΟΣ ΕΛΚΥΣΤΗΣ LORENZ\nΓιά σ=10, b=8/3,r=28 me odeplot", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*], *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*], *orientation* = [−57, 75, 0], numpoints = 6800)

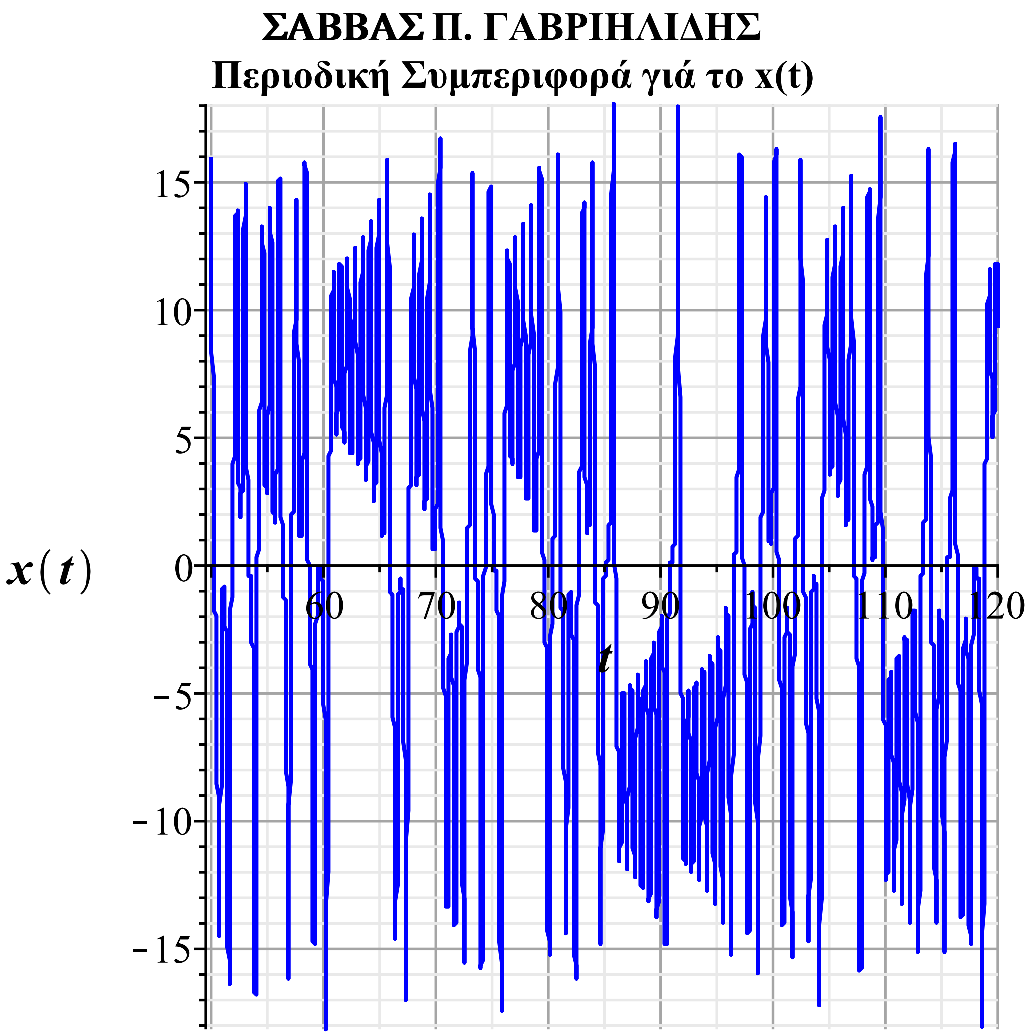
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
3D-ΠΑΡΑΞΕΝΟΣ ΕΛΚΥΣΤΗΣ LORENZ
Γιά σ=10,b=8/3,r=28 me odeplot



>

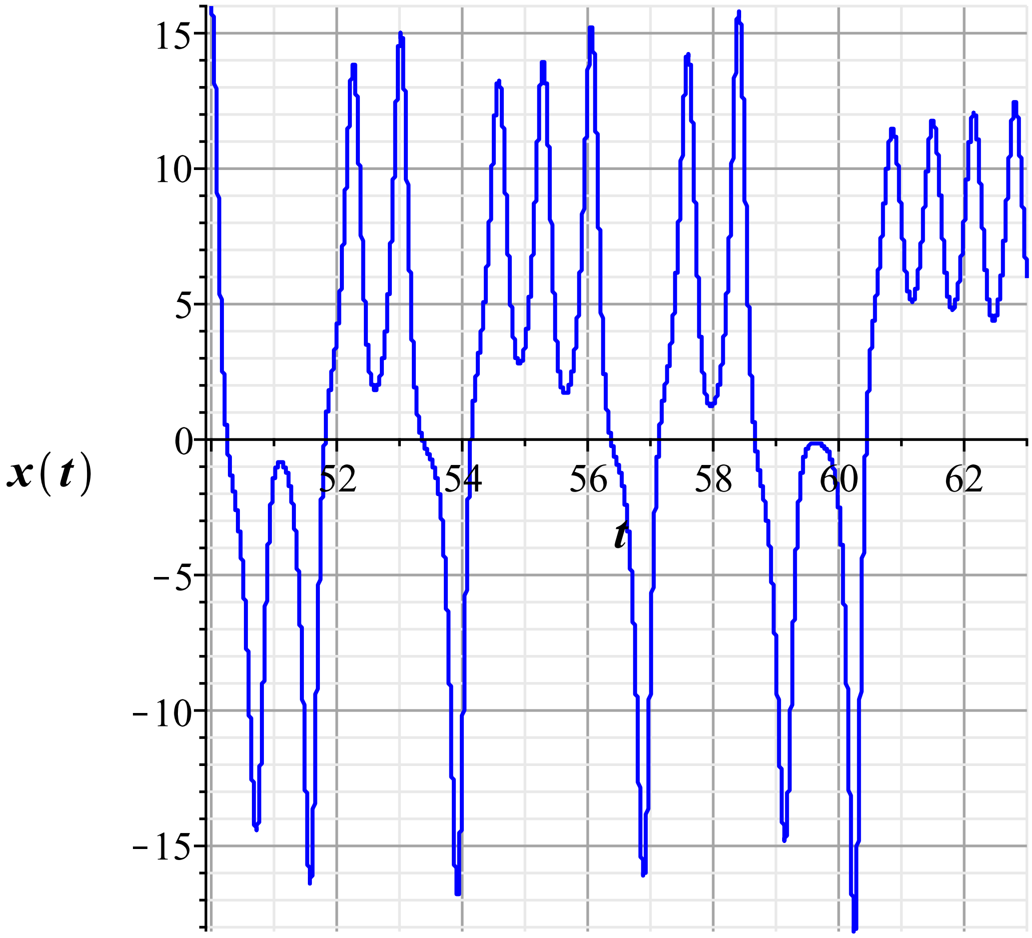
1-x(t). Περιοδική Συμπεριφορά γιά το x(t) ΜΕ odeplot .

> *odeplot*(*sola*, [*t*, *x*(*t*)], 50 ..120, *numpoints* = 6800, *color* = *blue*, *thickness* = 1, *labels* = [*t*, *x*(*t*)], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΠεριοδική Συμπεριφορά γιά το x(t)", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*], *axis* = [*gridlines*])



> *odeplot*(*sola*, [*t*, *x*(*t*)], 50 ..63, *numpoints* = 6800, *color* = *blue*, *thickness* = 1, *labels* = [*t*, *x*(*t*)], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΠεριοδική Συμπεριφορά γιά το x(t)", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*], *axis* = [*gridlines*])

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
Περιοδική Συμπεριφορά γιά το x(t)



ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ t μηδενισμού της x(t) στο διάστημα t=50..63 .

> $t1x := fsolve(rhs(sola[2])(t) = 0, t = 50..52)$

$$t1x := 50.25247616 \tag{32}$$

> $t2x := fsolve(rhs(sola[2])(t) = 0, t = 52..56)$

$$t2x := 54.14159071 \tag{33}$$

> $t3x := fsolve(rhs(sola[2])(t) = 0, t = 56..58)$

$$t3x := 57.13536235 \tag{34}$$

> $t4x := fsolve(rhs(sola[2])(t) = 0, t = 58..59)$

$$t4x := 58.66834325 \tag{35}$$

> $t5x := fsolve(rhs(sola[2])(t) = 0, t = 59..59.5)$

$$t5x := fsolve(x(t)(t) = 0, t, 59..59.5) \tag{36}$$

> $t6x := fsolve(rhs(sola[2])(t) = 0, t = 59.5..60)$

$$t6x := fsolve(x(t)(t) = 0, t, 59.5..60) \tag{37}$$

> $t7x := fsolve(rhs(sola[2])(t) = 0, t = 60..62)$

$$t7x := 60.43842362 \tag{38}$$

> $t8x := fsolve(rhs(sola[2])(t) = 0, t = 62..63)$

$$t8x := fsolve(x(t)(t) = 0, t, 62..63) \tag{39}$$

> $t2x - t1x$

$$3.88911455 \tag{40}$$

> $t3x - t2x$

$$2.99377164 \tag{41}$$

> $t4x - t3x$

$$1.53298090 \quad (42)$$

> $t5x - t4x$

$$fsolve(x(t)(t) = 0, t, 59..59.5) - 58.66834325 \quad (43)$$

> $t6x - t5x$

$$fsolve(x(t)(t) = 0, t, 59.5..60) - fsolve(x(t)(t) = 0, t, 59..59.5) \quad (44)$$

> $t7x - t6x$

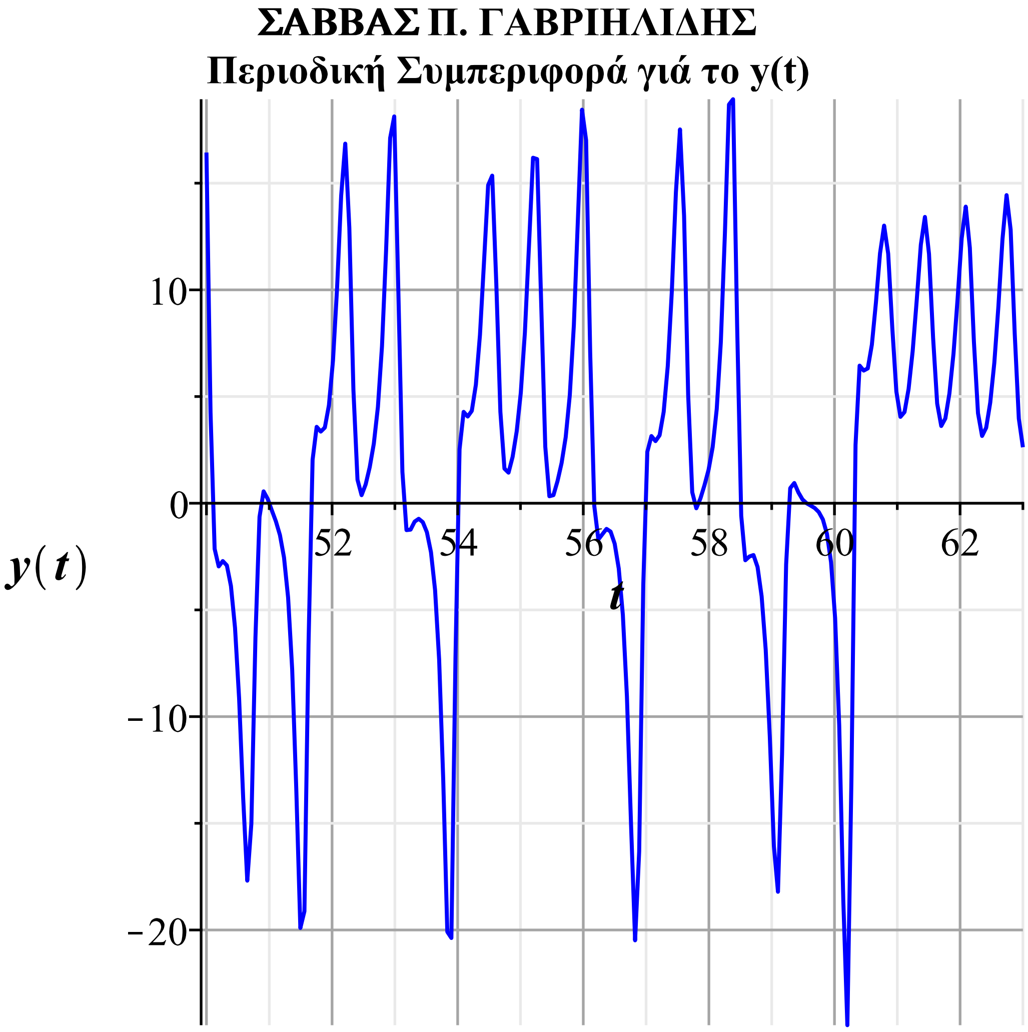
$$60.43842362 - fsolve(x(t)(t) = 0, t, 59.5..60) \quad (45)$$

> $t8x - t7x$

$$fsolve(x(t)(t) = 0, t, 62..63) - 60.43842362 \quad (46)$$

1-y(t). Περιοδική Συμπεριφορά γιά το y(t) ΜΕ odeplot .

> $odeplot(sola, [t, y(t)], 50..63, color = blue, thickness = 1, labels = [t, y(t)], labelfont = [arial, bold, 14], title$ = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΠεριοδική Συμπεριφορά γιά το y(t)", $titlefont = [arial, 12, bold], axis = [gridlines])$



>

ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ t μηδενισμού της y(t) στο διάστημα t=50..63 .

> $t1y := fsolve(rhs(sola[3])(t) = 0, t = 50..54)$

$$t1y := 50.09763891 \quad (47)$$

> $t2y := fsolve(rhs(sola[3])(t) = 0, t = 54..54.42)$

$$t2y := 54.00480784 \quad (48)$$

> $t3y := fsolve(rhs(sola[3])(t) = 0, t = 54.43 ..55)$

$$t3y := fsolve(y(t)(t) = 0, t, 54.43 ..55) \quad \textbf{(49)}$$

> $t4y := fsolve(rhs(sola[3])(t) = 0, t = 56 ..58)$

$$t4y := 56.98397528 \quad \textbf{(50)}$$

> $t5y := fsolve(rhs(sola[3])(t) = 0, t = 58 ..58.5)$

$$t5y := fsolve(y(t)(t) = 0, t, 58 ..58.5) \quad \textbf{(51)}$$

> $t6y := fsolve(rhs(sola[3])(t) = 0, t = 58.7 ..60)$

$$t6y := 59.55565299 \quad \textbf{(52)}$$

>

> $t3y - t1y$

$$fsolve(y(t)(t) = 0, t, 54.43 ..55) - 50.09763891 \quad \textbf{(53)}$$

> $t4y - t2y$

$$2.97916744 \quad \textbf{(54)}$$

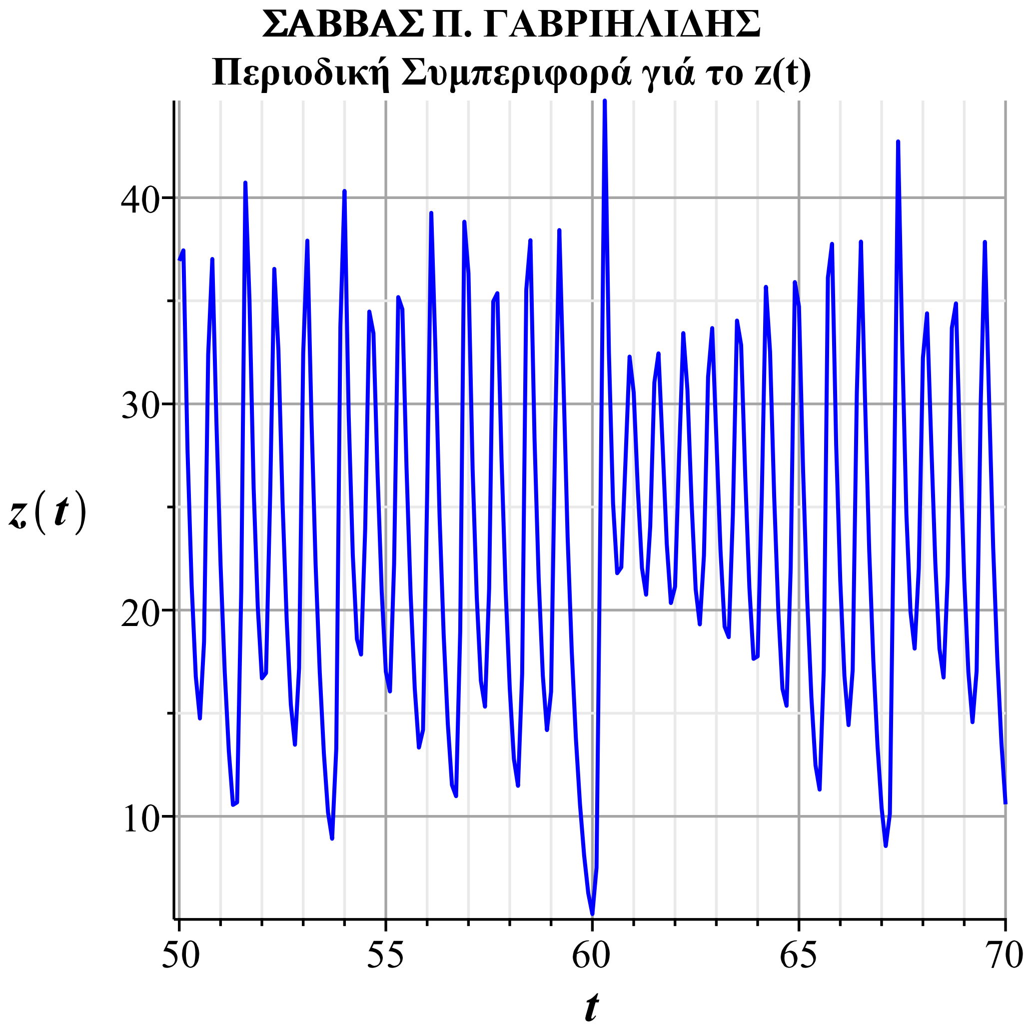
> $t6y - t4y$

$$2.57167771 \quad \textbf{(55)}$$

>

1-z(t). Περιοδική Συμπεριφορά γιά το z(t) ΜΕ odeplot .

> $odeplot(sola, [t, z(t)], 50 ..70, color = blue, thickness = 1, labels = [t, z(t)], labelfont = [arial, bold, 14], title$ = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΠεριοδική Συμπεριφορά γιά το z(t)", $titlefont = [arial, 12, bold], axis = [gridlines])$



>

ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΣΤΙΓΜΕΣ t μηδενισμού της z(t) ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ .

>

ANIMATION

> $rhs(sola[2](t))$

$$x(t)(t) \tag{56}$$

> $rhs(sola[3](t))$

$$y(t)(t) \tag{57}$$

> $rhs(sola[4](t))$

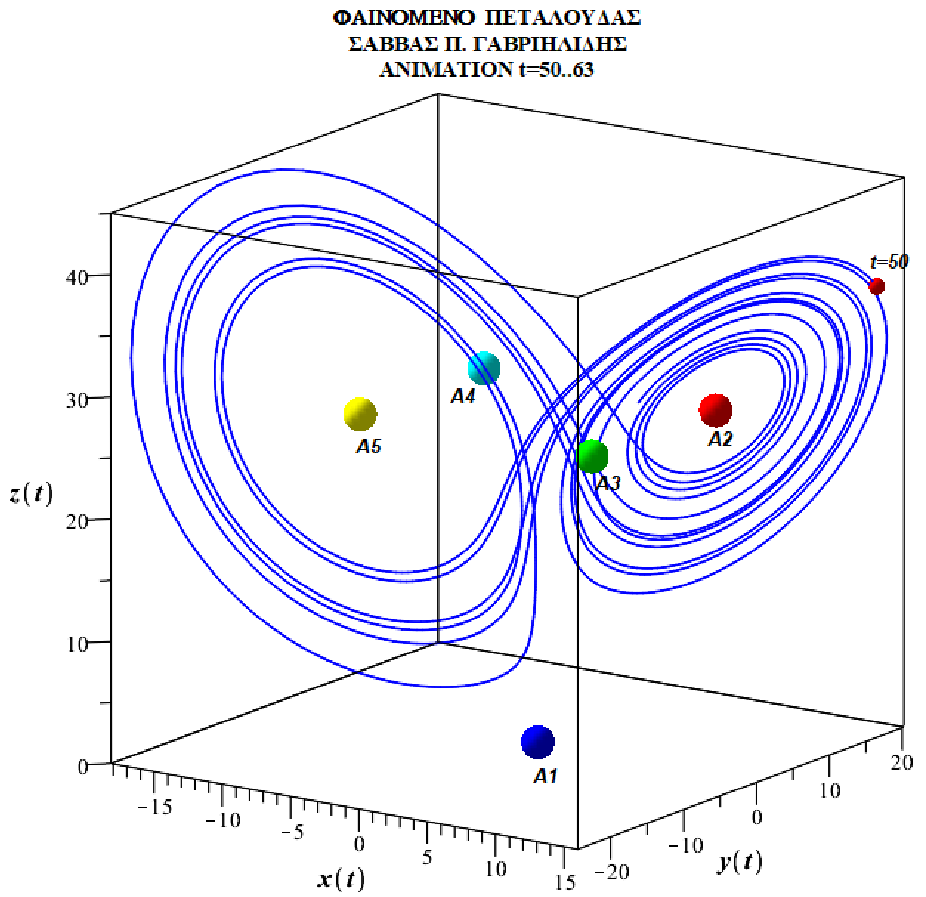
$$z(t)(t) \tag{58}$$

> $P := spacecurve([rhs(sola[2](t)), rhs(sola[3](t)), rhs(sola[4](t))], t = 50..63, numpoints = 2000, labels = [x(t), y(t), z(t)], labelfont = [arial, bold, 14], color = blue)$:

> $animP := animate(pointplot3d, [[rhs(sola[2](t)), rhs(sola[3](t)), rhs(sola[4](t))], symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = red], t = 50..63, frames = 3)$:

> $display(P, animP, s1, s2, s3, s4, s5, orientation = [-55, 75, 0], title$ = "ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΠΕΤΑΛΟΥΔΑΣ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nANIMATION t=50..63", $titlefont = [arial, 12, bold])$:

>



Πέντε (5) Κρίσιμα Σημεία

$A1 := [0, 0, 0]$

$A2 := [6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27]$

$A3 := [6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27]$

$A4 := [-6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27]$

$A5 := [-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27]$

>