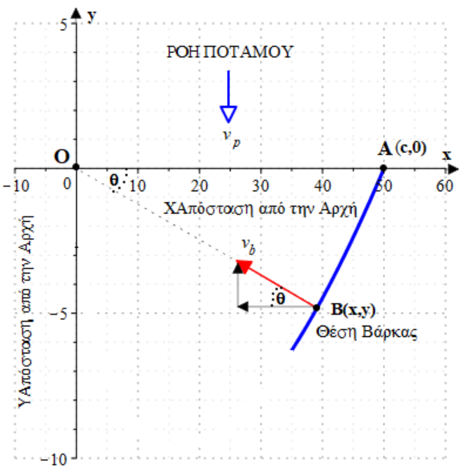
Θέμα : (Γιά τους εμπνευστές των θεμάτων Φυσικής των Πανελλήνιων εξετάσεων έτους 2019) .
Βάρκα (με βαρκάρη στο τιμόνι) ακίνητη στο σημείο **A(c,0)** της αριστερής όχθης ποταμού
που ρέει με ομοιόμορφη ταχύτητα $\vec{v}_p$ ως προς Αδρανειακό Σύστημα xOy ,
πρέπει να προσεγγίσει την δεξιά όχθη Oy του ποταμού .
Η σχετική ταχύτητα της βάρκας $\vec{v}_b$ ως προς το ρεύμα είναι σε μέτρο σταθερή $|\vec{v}_b| = v_b$,
αλλά το διάνυσμά της διευθύνεται πάντα προς την αρχή O του συστήματος xOy .
Να προσδιοριστεί η καμπύλη στην οποία κινείται η βάρκα και οι απαιτούμενοι κατά περίπτωση χρόνοι προσέγγισης της δεξιάς όχθης .

1. Γιά την περίπτωση $v_b > v_p$
2. Γιά την περίπτωση $v_b = v_p$
3. Γιά την περίπτωση $v_b < v_p$



Ανάλυση της κίνησης της βάρκας

α. Άξονας Ox .

$$\frac{d}{dt}x = -v_b \cdot \cos(\theta) = -\frac{v_b \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (1)$$

β. Άξονας Oy .

$$\frac{d}{dt}y = -v_p - v_b \cdot \sin(\theta) = -v_p - \frac{v_b \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (2)$$

$$\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Από τον συνδυασμό των (1),(2) προκύπτει η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση βάρκας :

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{v_p\sqrt{x^2+y(x)^2} + v_b y(x)}{v_b x}$$

Η διαφορική εξίσωση της κίνησης της βάρκας

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
Νίκης 9 ΒΕΡΟΙΑ

```
> with(plots) :
> with(DEtools) :
```

> $y' = \frac{(v[p] \cdot \text{sqrt}(x^2+y^2) + v[b] \cdot y)}{v[b] \cdot x}$

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{v_p\sqrt{x^2+y(x)^2} + v_b\, y(x)}{v_b\, x} \quad (1)$$

> $odeadvisor(\mathbf{(1)})$

$$[[\_homogeneous,\ class\ A],\ \_dAlembert] \quad (2)$$

> $ics := y(c) = 0$

$$ics := y(c) = 0 \quad (3)$$

> $simplify(dsolve(\{\mathbf{(1)}, ics\}))$ assuming $c > 0$

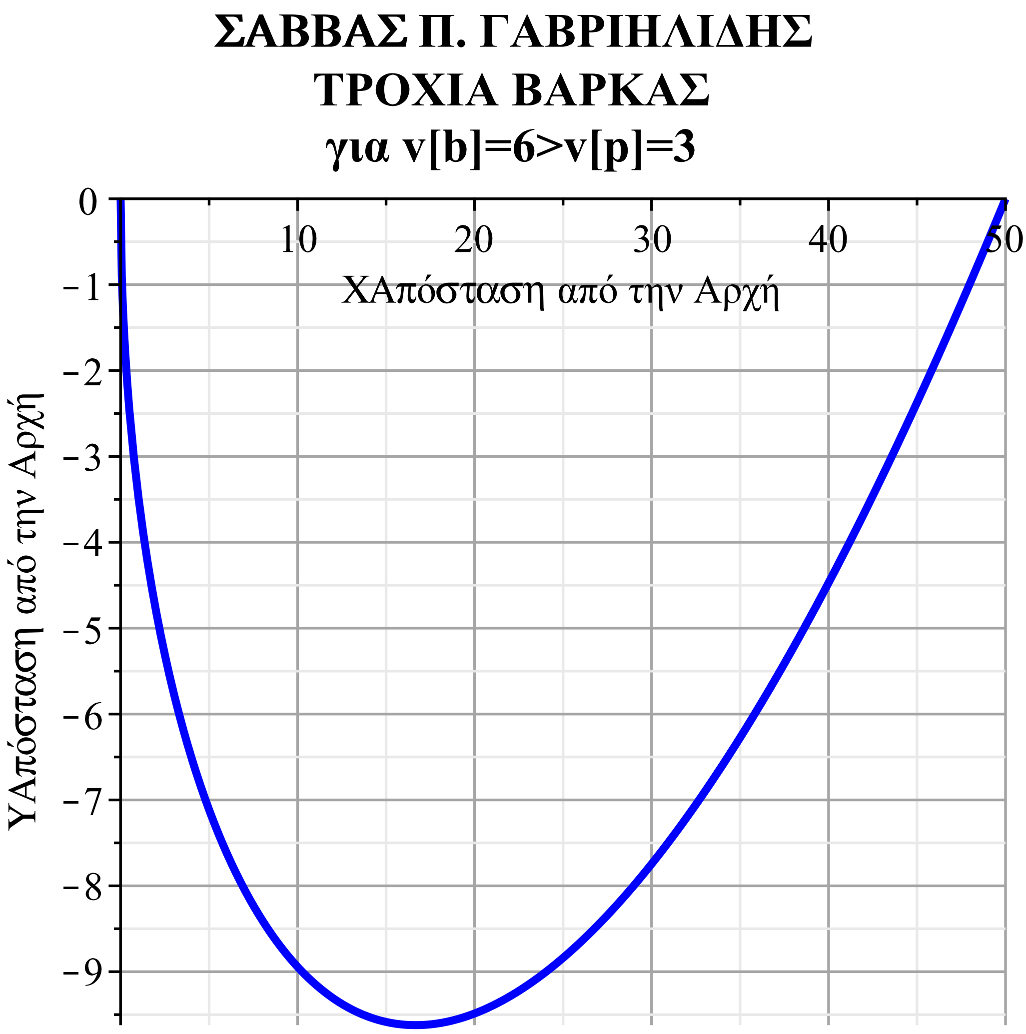
$$y(x) = \frac{x^{\frac{v_b+v_p}{v_b}}\, c^{-\frac{v_p}{v_b}}}{2} - \frac{x^{\frac{v_b-v_p}{v_b}}\, c^{\frac{v_p}{v_b}}}{2} \quad (4)$$

1. v[b]>v[p] .
Μόνο στην περίπτωση αυτή η βάρκα φτάνει στην αρχή των αξόνων O . !!!

> $simplify(subs(v[b]=6, v[p]=3, c=50, (4)))$

$$y(x) = \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{2}\,(x-50)}{20} \quad (5)$$

> $plot(rhs((5)), x=0..50, gridlines, labels=["ΧΑπόσταση από την Αρχή",$
"ΥΑπόσταση από την Αρχή"], $labeldirections=[default, vertical], color=blue,$
$thickness=3, title$
= "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ\nγια v[b]=6>v[p]=3", $titlefont$
$=[arial, 14, bold])$



> $Longueur1 := Int\left(\operatorname{sqrt}\left((diff(rhs((5)), x))^2+1\right), x=0..50\right)$
$= evalf\left(int\left(\operatorname{sqrt}\left((diff(rhs((5)), x))^2+1\right), x=0..50\right)\right)$

$$Longueur1 := \int_0^{50} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}\,(x-50)}{40\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}\,\sqrt{2}}{20}\right)^2 + 1}\, dx = 56.17176681 + 0.\,I \quad (6)$$

>

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΓΙΑ ΝΑ ΦΤΑΣΕΙ Η ΒΑΡΚΑ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ Ο .

> $ode1 := diff(x(t), t) = simplify\left(subs\left(\left\{y = -\frac{\sqrt{x(t)}\,\sqrt{2}\cdot(x(t)-50)}{20}, v[b]=6\right\}, -\frac{v[b]\cdot x(t)}{\operatorname{sqrt}\left(x(t)^2+y^2\right)}\right)\right)$

$$ode1 := \frac{d}{dt}\, x(t) = -\frac{60\, x(t)\sqrt{2}}{\sqrt{x(t)\,(x(t)+50)^2}} \tag{7}$$

> $ics1 := x(0) = 50$

$$ics1 := x(0) = 50 \tag{8}$$

> $sol1 := dsolve(\{ode1, ics1\}, numeric, output = listprocedure)$

$$sol1 := [t = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, x(t) = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}] \tag{9}$$

> **APAITOYMENOSXRONOS1 := *fsolve*(*rhs*(*sol1*[2](*t*)) = 0, *t* = 10 ..12)**

$$APAITOYMENOSXRONOS1 := 11.11109302 \tag{10}$$

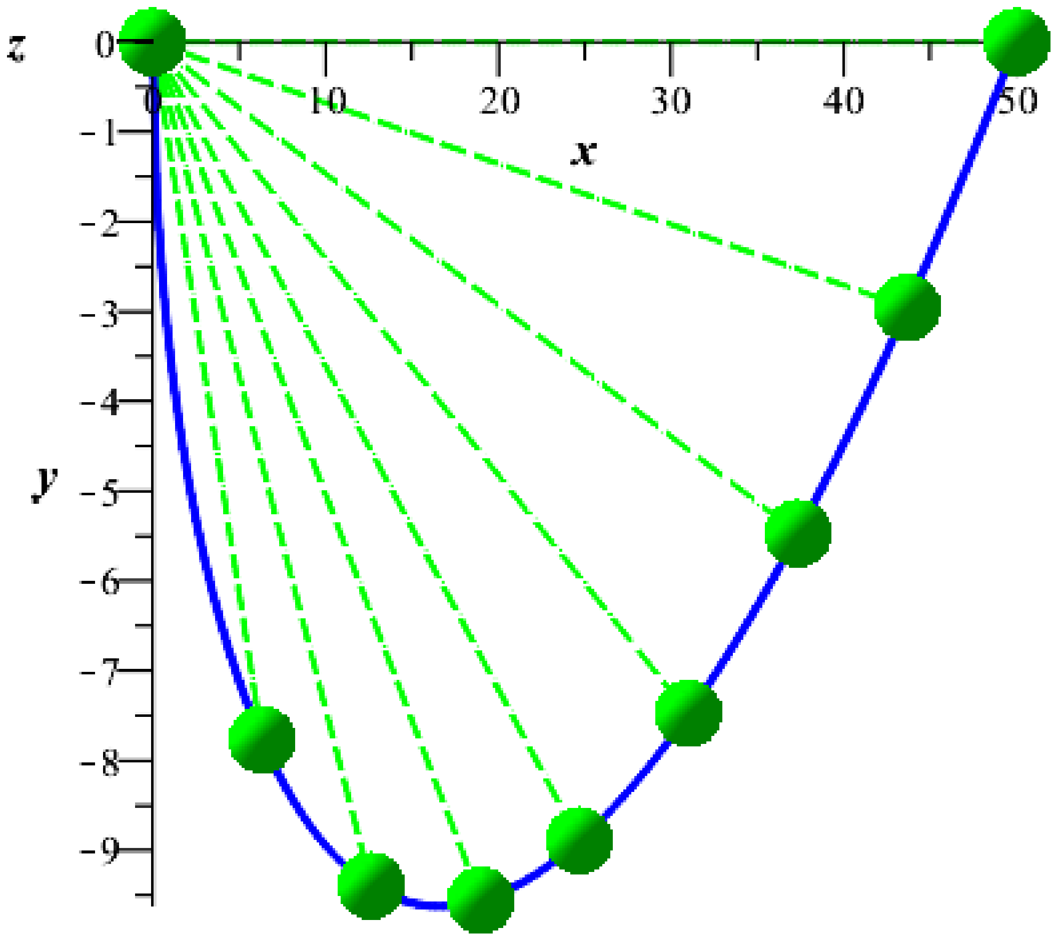
> *p1* := *spacecurve*([*x*, *rhs*(**(5)**), 0], *x* = 0 ..50, *color* = *blue*, *thickness* = 3, *title* = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nANIMATION-ΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ\nγια v[b]=6>v[p]=3", *titlefont* = [*arial*, 14, *bold*]) :

> *p1A* := *animate*(*pointplot3d*, [[*x*, *rhs*(**(5)**), 0], *color* = *green*, *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 40], *x* = 50 ..0, *frames* = 80, *trace* = 8) :

> *p1B* := *animate*(*spacecurve*, [[*t*·*x*, *t*·(*rhs*(**(5)**)), 0], *t* = 0 ..1, *numpoints* = 150, *color* = *green*, *thickness* = 2, *linestyle* = 3], *x* = 50 ..0, *frames* = 80, *trace* = 8) :

> *display*(*p1*, *p1A*, *p1B*, *orientation* = [−90, 0, 0], *axes* = *normal*, *labels* = [*x*, *y*, *z*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14])

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
ANIMATION-ΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ
για v[b]=6>v[p]=3



>

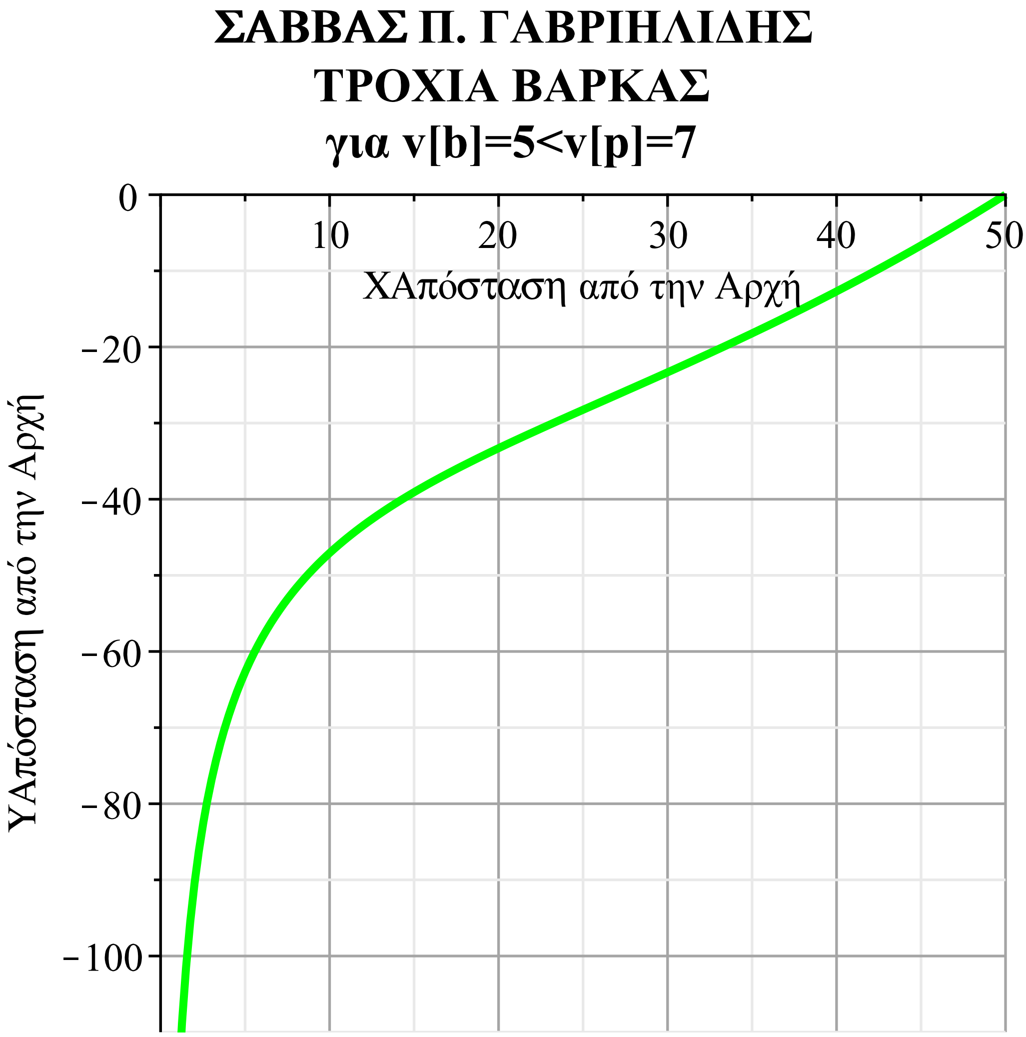
2. v[b]<v[p]

Στην περίπτωση αυτή η βάρκα ΔΕΝ φτάνει ποτέ στην απέναντι όχθη . Κινείται ασυμπτωτικά . !!!

> $simplify(subs(v[b]=5, v[p]=7, c=50, (4)))$

$$y(x) = \frac{50^{2/5}\,(x^{14/5}\,50^{1/5} - 125000)}{5000\,x^{2/5}} \tag{11}$$

> plot(rhs((11)), x = 0 ..50, gridlines, labels = ["ΧΑπόσταση από την Αρχή", "YΑπόσταση από την Αρχή"], labeldirections = [default, vertical], color = green, thickness = 3 , title = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ\nγια v[b]=5<v[p]=7", titlefont = [arial, 14, bold])



> Longueur2 := Int(sqrt((diff(rhs((11)), x))^2 + 1), x = 0 ..50) = evalf(int(sqrt((diff(rhs((11)), x))^2 + 1), x = 0 ..50))

$$Longueur2 := \int_0^{50} \sqrt{\left(\frac{7\,50^{3/5}\,x^{7/5}}{12500} - \frac{50^{2/5}\,(x^{14/5}\,50^{1/5} - 125000)}{12500\,x^{7/5}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Float}(\infty) \tag{12}$$

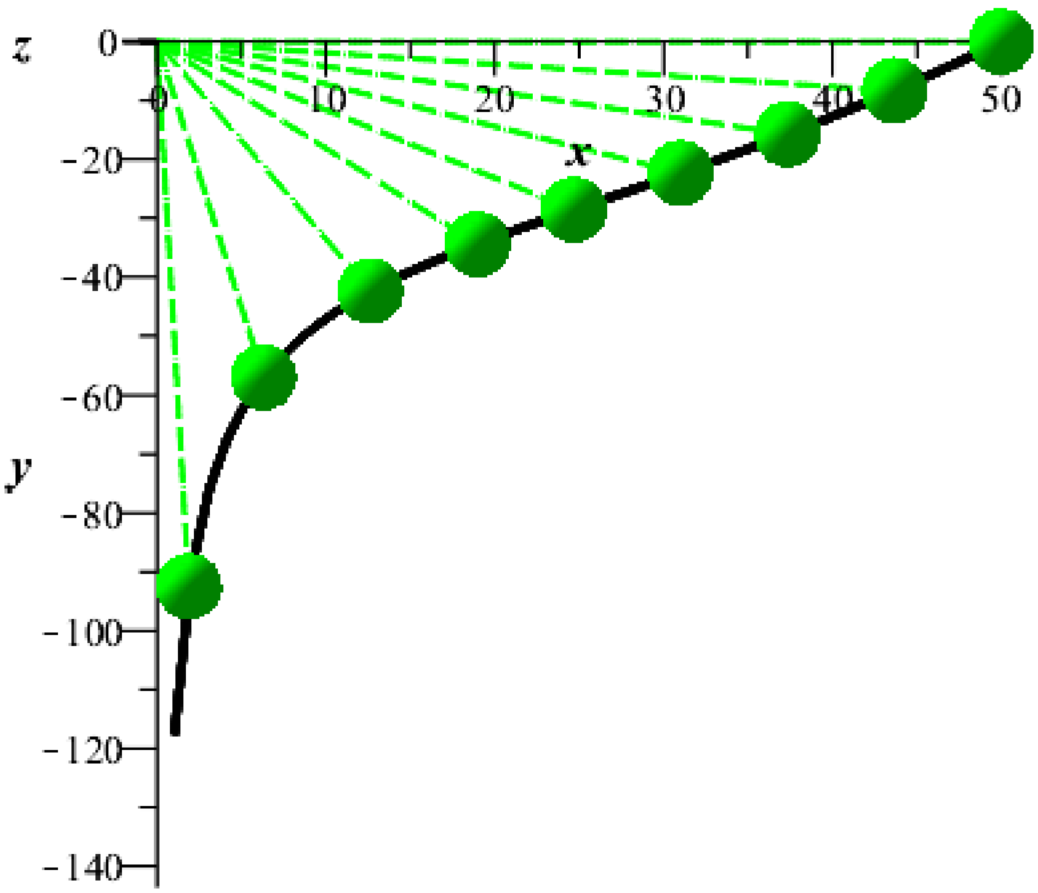
> p2 := plot3d([x, rhs((11)), 0], x = 0 ..50, color = blue, thickness = 3, title = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nANIMATION-ΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ\nγια v[b]=5<v[p]=7", titlefont = [arial, 14, bold]) :

> p2A := animate(pointplot3d, [[x, rhs((11)), 0], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 40], x = 50 ..0, frames = 80, trace = 8) :

> p2B := animate(spacecurve, [[t·x, t·(rhs((11))), 0], t = 0 ..1, numpoints = 150, color = green, thickness = 2, linestyle = 3], x = 50 ..0, frames = 80, trace = 8) :

> *display*(*p2*, *p2A*, *p2B*, *orientation* = [−90, 0, 0], *axes* = *normal*, *labels* = [*x*, *y*, *z*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14])

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
ANIMATION-ΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ
για v[b]=5<v[p]=7



>

3. v[b]=v[p]

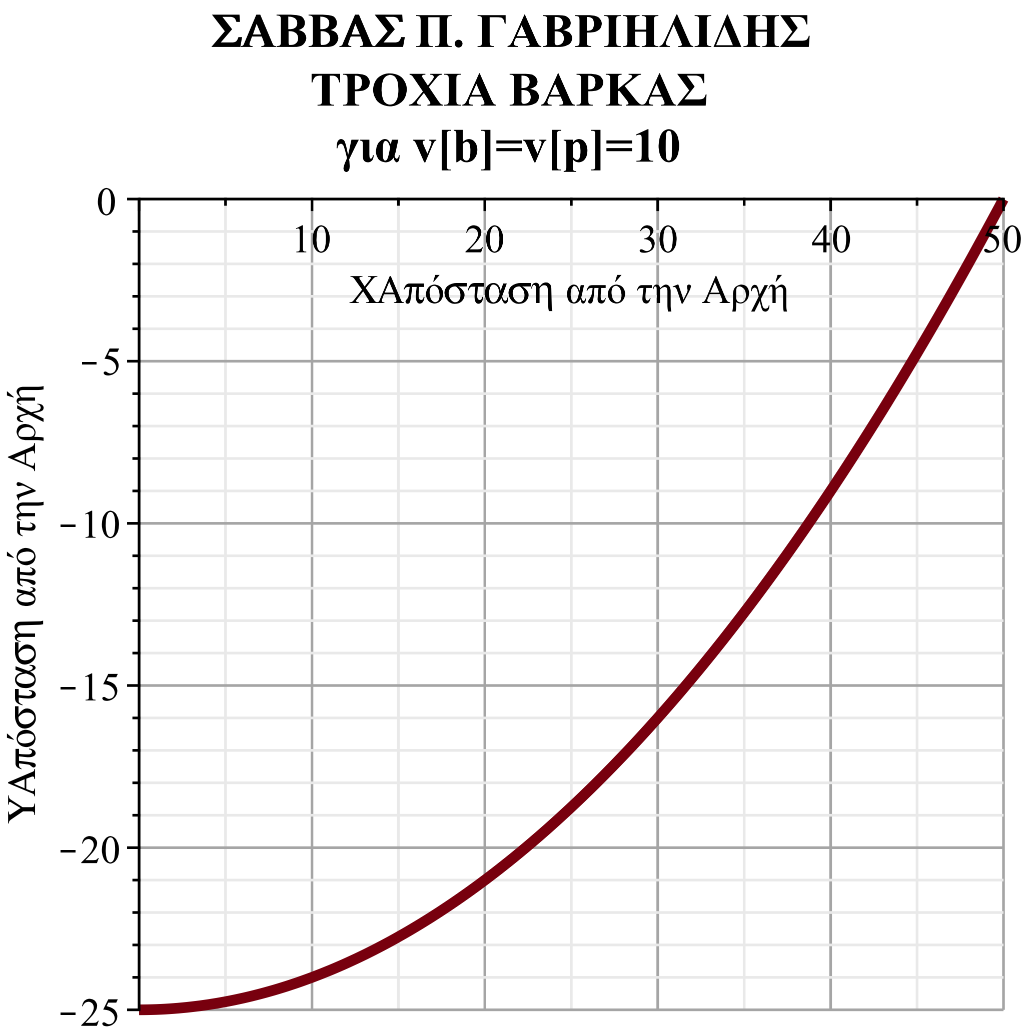
Στην περίπτωση αυτή η βάρκα φτάνει στην απέναντι

όχθη στα κατάντη του ποταμού .!!!

> $simplify(subs(v[b]=10, v[p]=10, c=50, (4)))$

$$y(x) = \frac{x^2}{100} - 25 \quad (13)$$

> $plot(rhs((13)), x=0..50, gridlines, labels=["ΧΑπόσταση από την Αρχή", "ΥΑπόσταση από την Αρχή"], labeldirections=[default, vertical], thickness=4, title="ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ\nγια v[b]=v[p]=10", titlefont=[arial, 14, bold])$



> $Longueur3 := Int\left(\text{sqrt}\left((diff(rhs((13)), x))^2 + 1\right), x=0..50\right) = evalf\left(int\left(\text{sqrt}\left((diff(rhs((13)), x))^2 + 1\right), x=0..50\right)\right)$

$$Longueur3 := \int_0^{50} \frac{\sqrt{x^2 + 2500}}{50}\, dx = 57.38967873 \quad (14)$$

>

ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΟΣ ΧΡΟΝΟΣ ΓΙΑ ΝΑ ΦΤΑΣΕΙ Η ΒΑΡΚΑ ΣΤΗΝ ΑΠΕΝΑΝΤΙ ΟΧΘΗ ΣΤΑ ΚΑΤΑΝΤΗ ΤΟΥ ΠΟΤΑΜΟΥ .

> $ode3 := diff(x(t), t) = simplify\left(subs\left(\left\{y = \frac{x(t)^2}{100} - 50, v[b]=10\right\}, -\frac{v[b]\cdot x(t)}{\text{sqrt}\left(x(t)^2 + y^2\right)}\right)\right)$

(15)

$$ode3 := \frac{d}{dt}\, x(t) = -\frac{1000\, x(t)}{\sqrt{x(t)^4 + 25000000}} \quad (15)$$

> ics3 := x(0) = 50

$$ics3 := x(0) = 50 \quad (16)$$

> sol3 := dsolve({ode3, ics3}, numeric, output = listprocedure, maxfun = 500000)

$$sol3 := [t = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, x(t) = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}] \quad (17)$$

>

> sol3(0)

$$[t(0) = 0., x(t)(0) = 50.] \quad (18)$$

> sol3(10)

$$[t(10) = 10., x(t)(10) = 6.97517414656620] \quad (19)$$

> sol3(50)

$$[t(50) = 50., x(t)(50) = 0.00233991752606894] \quad (20)$$

> sol3(60)

$$[t(60) = 60., x(t)(60) = 0.000316660782735611] \quad (21)$$

> sol3(70)

$$[t(70) = 70., x(t)(70) = 0.0000428411867572167] \quad (22)$$

> sol3(78)

$$[t(78) = 78., x(t)(78) = 8.63931730181125\ 10^{-6}] \quad (23)$$

> sol3(79)

$$[t(79) = 79., x(t)(79) = 7.06893137640348\ 10^{-6}] \quad (24)$$

> sol3(80)

$$[t(80) = 80., x(t)(80) = 5.78605046599808\ 10^{-6}] \quad (25)$$

> sol3(100)

$$[t(100) = 100., x(t)(100) = 9.95843211076425\ 10^{-8}] \quad (26)$$

> sol3(192.0362)

$$[t(192.0362) = 192.0362, x(t)(192.0362) = 1.10921196899532\ 10^{-13}] \quad (27)$$

> sol3(193)

$$[t(193) = 193., x(t)(193) = -1.19547574980403\ 10^{-9}] \quad (28)$$

> sol3(192.0362865)

$$[t(192.0362865) = 192.0362865, x(t)(192.0362865) = 4.07070441223390\ 10^{-19}] \quad (29)$$

>

>

> **APAITOYMENOSXRONOS3 := fsolve(rhs(sol3[2](t)) = 0, t = 190 ..193)**

$$APAITOYMENOSXRONOS3 := 192.0362865 \quad (30)$$

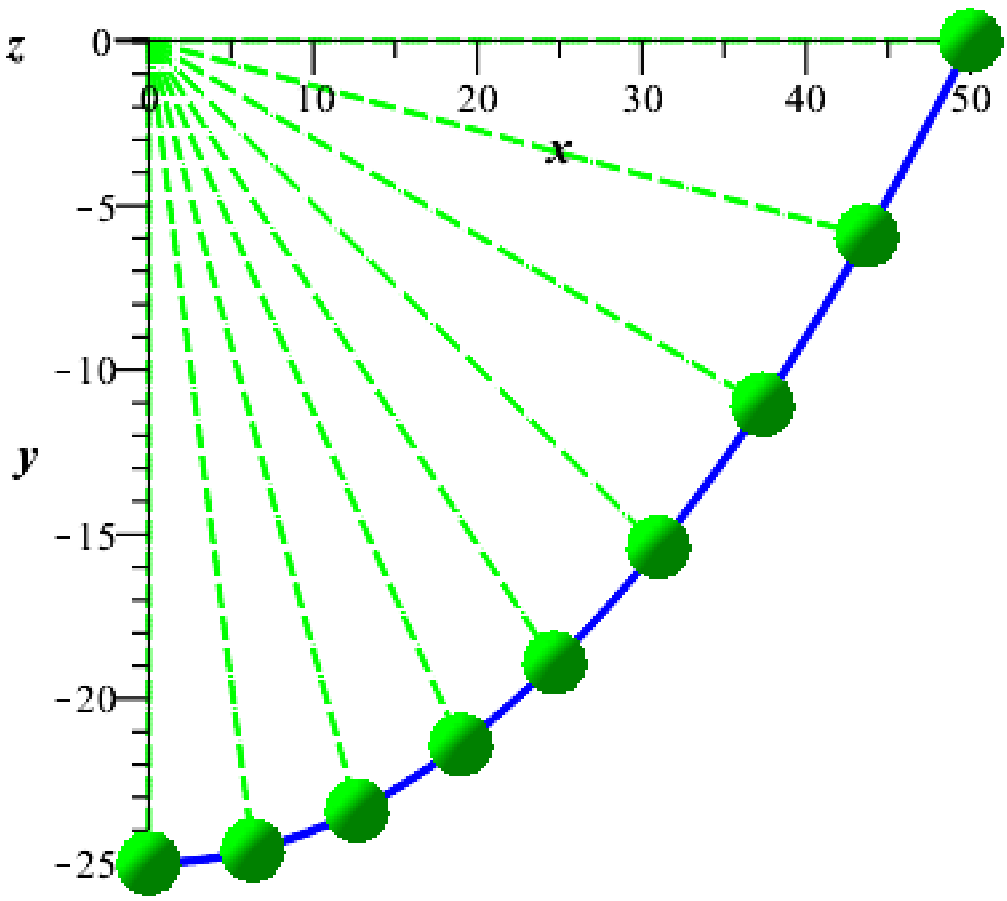
> p3 := spacecurve([x, rhs((13)), 0], x = 0 ..50, color = blue, thickness = 3, title = "ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nANIMATION-ΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ\nγια v[b]=v[p]=10", titlefont = [arial, 14, bold]) :

> p3A := animate(pointplot3d, [[x, rhs((13)), 0], color = green, symbol = solidcircle, symbolsize = 40], x = 50 ..0, frames = 80, trace = 8) :

> p3B := animate(spacecurve, [[t·x, t·(rhs((13))), 0], t = 0 ..1, numpoints = 150, color = green, thickness = 2, linestyle = 3], x = 50 ..0, frames = 80, trace = 8) :

> display(p3, p3A, p3B, orientation = [-90, 0, 0], axes = normal, labels = [x, y, z], labelfont = [arial, bold, 14])

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
ANIMATION-ΤΡΟΧΙΑ ΒΑΡΚΑΣ
για v[b]=v[p]=10



>