ΘΕΜΑ :

Σώμα κινείται (**χωρίς καύσιμα , με κινητήρια δύναμη την Βαρύτητα της Γης**) σε μιά λεία ευθύγραμμη υπόγεια σήραγγα που ενώνει δύο σημεία της επιφάνειας της Γης .

Να αποδείξουμε

1. ότι το σώμα κινείται με απλή αρμονική κίνηση
2. Να βρούμε τον χρόνο aller-retour από το σημείο εκκίνησης .

Συμπέρασμα : **ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ** από το μήκος της σήραγγας ο χρόνος είναι ίδιος .(84.3 min) .!!!

3. Και ίσος με την περίοδο (χρόνο aller-retour) ενός Δορυφόρου σε κυκλική τροχιά λίγο πάνω από την επιφάνεια της Γης .

Παραδοχές :

Η πυκνότητα της Γης είναι σταθερή .

Η Γη είναι σφαιρική με ακτίνα : $R_e = 6.37 \cdot 10^6\ m$

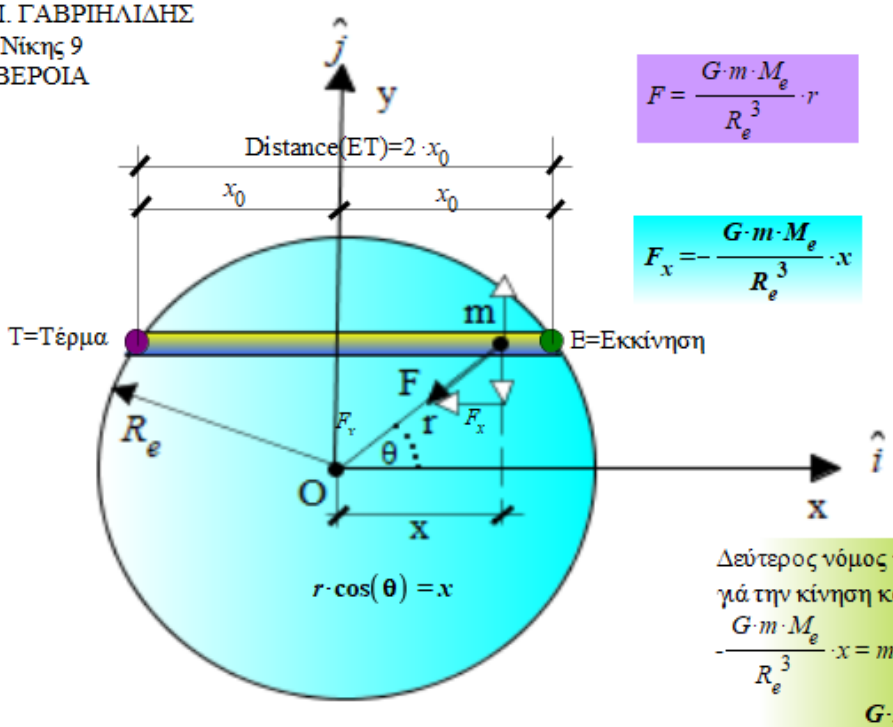
Η μάζα της Γης είναι ίση με : $M_e = 5.98 \cdot 10^{24}\ kg$

Παγκόσμια Βαρυτική Σταθερά : $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

```
> restart
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
> with(plots) :
> with(plottools) :
```

ΛΥΣΗ .

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
Νίκης 9
ΒΕΡΟΙΑ



$$F=\frac{G\cdot m\cdot M_e}{R_e^{\,3}}\cdot r$$

$$F_x=-\frac{G\cdot m\cdot M_e}{R_e^{\,3}}\cdot x$$

Δεύτερος νόμος του Newton γιά την κίνηση κατά x :

$$-\frac{G\cdot m\cdot M_e}{R_e^{\,3}}\cdot x=m\cdot\ddot{x}\Rightarrow$$

$$ode:=\ddot{x}+\frac{G\cdot M_e}{R_e^{\,3}}\cdot x=0$$

Παραδοχές :

Η πυκνότητα της Γης είναι σταθερή .

Η Γη είναι σφαιρική με ακτίνα : $R_e=6.37\cdot10^6\,m$

Η μάζα της Γης είναι ίση με : $M_e=5.98\cdot10^{24}\,kg$

Παγκόσμια Βαρυτική Σταθερά : $G=6.67\cdot10^{-11}\,N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

```
> with(DEtools) :
```

1. Το σώμα κινείται με Απλή Αρμονική κίνηση .

'Οταν το σώμα βρίσκεται μέσα στην σήραγγα σε τυχούσα θέση , η δύναμη της βαρύτητας **F** στην οποία υπόκειται κατευθύνεται προς το κέντρο **O** της Γης και έχει ένταση :

```
> F := G·m·M[e]/R[e]^3·r
```

$$F:=\frac{G\,m\,M_e\,r}{R_e^3} \qquad (1)$$

Η συνιστώσα κατά y της δύναμης F εξισορροπείται από την κάθετη δύναμη την οποία ασκεί το ΛΕΙΟ τοίχωμα της σήραγγας .

Έτσι έχουμε μόνο την κατά x συνιστώσα F_x που είναι :

```
> F[x] := -G·m·M[e]/R[e]^3·x
```

$$F_x:=-\frac{G\,m\,M_e\,x}{R_e^3} \qquad (2)$$

Εφαρμόζουμε τον δεύτερο νόμο του Newton γιά την κίνηση στην κατεύθυνση x και βρίσκουμε :

> $-\frac{G\,m\,M_e\,x}{R_e^3} = m\cdot\ddot{x}$

$$-\frac{G\,m\,M_e\,x(t)}{R_e^3} = m\,\ddot{x}(t) \tag{3}$$

Απαλείφουμε το m και έχουμε την Διαφορική Εξίσωση της κίνησης :

> $ode := diff(x(t), t\$2) + \frac{G\cdot M[e]\cdot x(t)}{R[e]^3} = 0$

$$ode := \ddot{x}(t) + \frac{G\,M_e\,x(t)}{R_e^3} = 0 \tag{4}$$

Η Διαφορική εξίσωση : $ode := \ddot{x}(t) + \frac{G M_e x(t)}{R_e^3} = 0$,ομογενής δευτέρας τάξεως πρώτου βαθμού , είναι η εξίσωση της Απλής Αρμονικής ταλάντωσης με κυκλική συχνότητα : $\omega = \sqrt{\frac{G\cdot M_e}{R_e^3}}$.

Γράφουμε ξανά την Διαφορική Εξίσωση :

> $ode1 := diff(x(t), t\$2) + \omega^2\cdot x(t) = 0$

$$ode1 := \ddot{x}(t) + \omega^2\,x(t) = 0 \tag{5}$$

Αρχικές συνθήκες : $ics := x(0) = x_0, D(x)(0) = 0$:

> $ics := x(0) = x[0], D(x)(0) = 0$

$$ics := x(0) = x_0, D(x)(0) = 0 \tag{6}$$

Η γενική λύση της ***ode1*** είναι :

> $sol := dsolve([ode1, ics])$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2\,x(t) = 0$$

$$sol := x(t) = x_0\cos(\omega\,t) \tag{7}$$

> $odetest(sol, [ode1, ics])$

$$[0, 0, 0] \tag{8}$$

2. Περίοδος T Ταλάντωσης (Χρόνος (aller-retour) που απαιτείται γιά να επανέλθει στο σημείο Εκκίνησης) . $T := 84.29935610\ \text{min}$

$$T := 84.29935610\ \text{min} \tag{9}$$

Ανεξάρτητη της απόστασης Εκκίνησης-Τέρματος .!!!

> $G1 := 6.67\cdot10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$:

> $M[e1] := 5.98\cdot10^{24}\,\text{kg}$:

> $R[e1] := 6.37\cdot10^{6}\,\text{m}$:

> $\omega1 := simplify\left(\left(\frac{G1\cdot M[e1]}{R[e1]^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$

$$\omega1 := 0.001242236714\ \frac{1}{\text{s}} \tag{10}$$

> $T := convert\left(simplify\left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi}}{\omega 1} \right), units, \mathrm{min} \right)$

$$T := 84.29935610 \text{ min} \quad (11)$$

3. Δορυφόρος σε Κυκλική τροχιά λίγο πάνω από την επιφάνεια της Γης .

> $a_ := -R[e1] \cdot \left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi}}{Tdor} \right)^2 \cdot _r :$

> $Fdor_ := -\frac{G1 \cdot M[e1] \cdot m}{R[e1]^2} \cdot r_ :$

Μπορούμε να γράψουμε :

> $a_ \cdot m = Fdor :$

> $R[e1] \cdot \left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi}}{Tdor} \right)^2 = \frac{G1 \cdot M[e1]}{R[e1]^2} :$

> $Tdor := simplify\left(\frac{2 \cdot \mathrm{Pi}}{\left(\frac{G1 \cdot M[e1]}{R[e1]^3} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)$

$$Tdor := 5057.961366 \text{ s} \quad (12)$$

> $convert(\ combine(\ (12), 'units'), 'units', 'min')$

$$84.29935610 \text{ min} \quad (13)$$

Απεδείχθη

και το τρίτο ερώτημα .!!

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ :
GP : Γεωγραφικό Πλάτος
GM: Γεωγραφικό μήκος
B: ΒΕΡΟΙΑ
GR: ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ
M: ΜΟΣΧΑ
S: ΣΙΔΝΕΫ
LS: ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ
KT: ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ

ΒΕΡΟΙΑ : $\left(GP_B = 40^0 31'11.9" \text{ N}, GM_B = 22^0 12'7" \text{E}\right):$

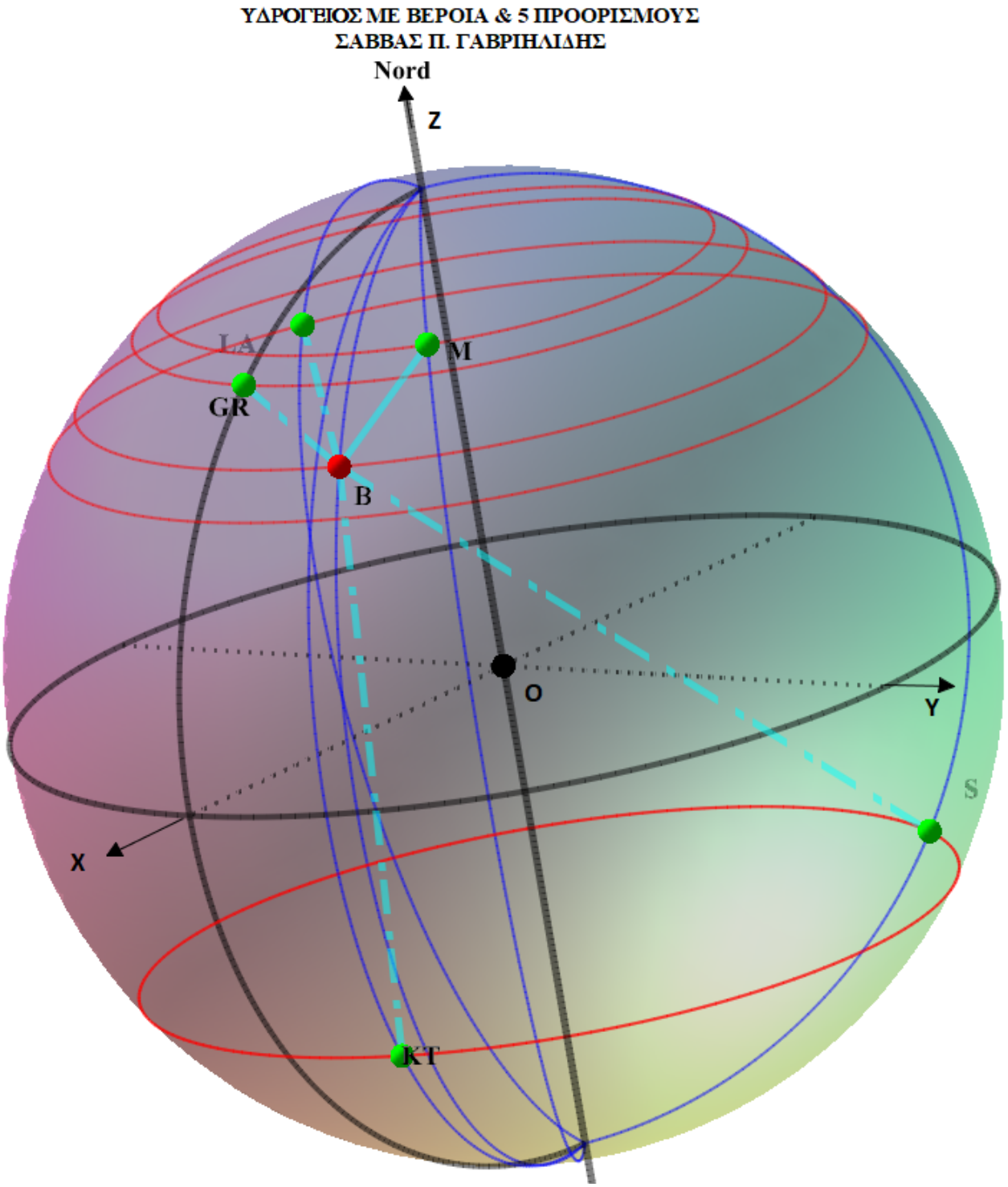
ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ : $\left(GP_{GR} = 51^0 28'59.3" \text{ N}, GM_{GR} = 0\right):$

ΜΟΣΧΑ : $\left(GP_M = 55^0 45'14" \text{ N}, GM_M = 37^0 37'13.1" \text{E}\right):$

ΣΙΔΝΕΫ : $\left(GP_S = 33^0 51'23.9" \text{ S}, GM_S = 151^0 12'56.1" \text{E}\right):$

ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ : $\left(GP_{LS} = 34^0 06'48.0" \text{ N}, GM_{LS} = 118^0 19'46.9" \text{W}\right):$

ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ : $\left(GP_{KT} = 33^0 54'16.6" \text{ S}, GM_{KT} = 18^0 24'36.6" \text{E}\right):$



Μετατροπή σε ακτίνια (rad) .

> $GP[B] := evalf\left(convert\left(40 + \frac{31}{60} + \frac{11.9}{60 \cdot 60}, units, deg, rad\right)\right)$

$$GP_B := 0.7072069282 \quad (14)$$

> $GM[B] := evalf\left(convert\left(22 + \frac{12}{60} + \frac{7}{60 \cdot 60}, units, deg, rad\right)\right)$

$$GM_B := 0.3874970309 \quad (15)$$

> $GP[GR] := evalf\left(convert\left(51 + \frac{28}{60} + \frac{59.3}{60 \cdot 60}, units, deg, rad\right)\right)$

(16)

$$GP_{GR} := 0.8985502831 \quad (16)$$

```
> GM[GR] := evalf(convert(0, units, deg, rad))
```

$$GM_{GR} := 0. \quad (17)$$

```
> GP[M] := evalf(convert(55 + 45/60 + 14/(60·60), units, deg, rad))
```

$$GP_M := 0.9730889322 \quad (18)$$

```
> GM[M] := evalf(convert(37 + 37/60 + 13.1/(60·60), units, deg, rad))
```

$$GM_M := 0.6565981979 \quad (19)$$

```
> GP[S] := evalf(convert(33 + 51/60 + 23.9/(60·60), units, deg, rad))
```

$$GP_S := 0.5909098224 \quad (20)$$

```
> GM[S] := evalf(convert(151 + 12/60 + 56.1/(60·60), units, deg, rad))
```

$$GM_S := 2.639209809 \quad (21)$$

```
> GP[LA] := evalf(convert(34 + 06/60 + 48/(60·60), units, deg, rad))
```

$$GP_{LA} := 0.5953899855 \quad (22)$$

```
> GM[LA] := evalf(convert(118 + 19/60 + 46.9/(60·60), units, deg, rad))
```

$$GM_{LA} := 2.065242772 \quad (23)$$

```
> GP[KT] := evalf(convert(33 + 54/60 + 16.6/(60·60), units, deg, rad))
```

$$GP_{KT} := 0.5917470955 \quad (24)$$

```
> GM[KT] := evalf(convert(18 + 24/60 + 36.6/(60·60), units, deg, rad))
```

$$GM_{KT} := 0.3213180242 \quad (25)$$

ΒΕΡΟΙΑ : $(GP_B = 0.7072069282 \text{ rad N}, GM_B = 0.3874970309 \text{ rad E})$:

ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ : $(GP_G = 0.8985502831 \text{ rad N}, GM_G = 0 \text{ rad})$:

ΜΟΣΧΑ : $(GP_M = 0.9730889322 \text{ rad N}, GM_M = 0.6565981979 \text{ rad E})$:

ΣΙΔΝΕΫ : $(GP_S = 0.5909098224 \text{ rad S}, GM_S = 2.639209809 \text{ rad E})$:

ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ : $(GP_{LS} = 0.5953899855 \text{ rad N}, GM_{LS} = 2.065242772 \text{ rad W})$:

ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ : $(GP_{KT} = 0.5917470955 \text{ rad S}, GM_{KT} = 0.3213180242 \text{ rad E})$:

```
> R[e] := 6.37·10^6
```

$$R_e := 6.37000000\ 10^6 \quad (26)$$

```
> M[e] := 5.98·10^24
```

$$M_e := 5.980000000\ 10^{24} \quad (27)$$

```
> G := 6.67·10^-11
```

(28)

$$G := 6.670000000\ 10^{-11} \quad (28)$$

> $xB := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[B]\right)\cdot\cos(GM[B])$

$$xB := 4.483321436\ 10^{6} \quad (29)$$

> $yB := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[B]\right)\cdot\sin(GM[B])$

$$yB := 1.829787080\ 10^{6} \quad (30)$$

> $zB := R[e]\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - GP[B]\right)$

$$zB := 4.138672268\ 10^{6} \quad (31)$$

> $xGR := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[GR]\right)\cdot\cos(GM[GR])$

$$xGR := 3.966885122\ 10^{6} \quad (32)$$

> $yGR := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[GR]\right)\cdot\sin(GM[GR])$

$$yGR := 0. \quad (33)$$

> $zGR := R[e]\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - GP[GR]\right)$

$$zGR := 4.984046793\ 10^{6} \quad (34)$$

> $\mathbf{DistanceBGR := sqrt((xB - xGR)^2 + (yB - yGR)^2 + (zB - zGR)^2)}$

$$DistanceBGR := 2.080741529\ 10^{6} \quad (35)$$

ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΒΕΡΟΙΑΣ-ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ : $DistanceBGR := 2.080741529\ 10^{6}\ m$ **(~2081 km)**

> $xM := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[M]\right)\cdot\cos(GM[M])$

$$xM := 2.839353289\ 10^{6} \quad (36)$$

> $yM := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[M]\right)\cdot\sin(GM[M])$

$$yM := 2.188199872\ 10^{6} \quad (37)$$

> $zM := R[e]\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - GP[M]\right)$

$$zM := 5.265620022\ 10^{6} \quad (38)$$

> $DistanceBM := \mathbf{sqrt((xB - xM)^2 + (yB - yM)^2 + (zB - zM)^2)}$

$$DistanceBM := 2.025117833\ 10^{6} \quad (39)$$

ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΒΕΡΟΙΑΣ-ΜΟΣΧΑΣ : $DistanceBM := 2.025117833\ 10^{6}\ m$ **(~2025 km)**

> $xS := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + GP[S]\right)\cdot\cos(GM[S])$

$$xS := -4.636237426\ 10^{6} \quad (40)$$

> $yS := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + GP[S]\right)\cdot\sin(GM[S])$

$$yS := 2.547151274\ 10^{6} \quad (41)$$

> $zS := R[e]\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} + GP[S]\right)$

$$zS := -3.548834021\ 10^{6} \quad (42)$$

> $DistanceBS := \mathbf{sqrt}\left((xB - xS)^2 + (yB - yS)^2 + (zB - zS)^2\right)$

$$DistanceBS := 1.194900490\ 10^{7} \quad (43)$$

ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΒΕΡΟΙΑΣ-ΣΙΔΝΕΫ́ : $DistanceBS := 1.194900490\ 10^{7}\ m(\sim 11949\ km)$

> $xLA := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[LA]\right)\cdot\cos(-GM[LA])$

$$xLA := -2.502706292\ 10^{6} \quad (44)$$

> $yLA := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[LA]\right)\cdot\sin(-GM[LA])$

$$yLA := -4.642264617\ 10^{6} \quad (45)$$

> $zLA := R[e]\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - GP[LA]\right)$

$$zLA := 3.572497786\ 10^{6} \quad (46)$$

> $DistanceBLA := \mathbf{sqrt}\left((xB - xLA)^2 + (yB - yLA)^2 + (zB - zLA)^2\right)$

$$DistanceBLA := 9.540051893\ 10^{6} \quad (47)$$

ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΒΕΡΟΙΑΣ-ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ: $DistanceBLA := 9.54005189\,3\ 10^{6}\ m(\sim 9540\ km)$

> $xKT := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + GP[KT]\right)\cdot\cos(GM[KT])$

$$xKT := 5.016309096\ 10^{6} \quad (48)$$

> $yKT := R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} + GP[KT]\right)\cdot\sin(GM[KT])$

$$yKT := 1.669692596\ 10^{6} \quad (49)$$

> $zKT := R[e]\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} + GP[KT]\right)$

$$zKT := -3.553261838\ 10^{6} \quad (50)$$

> $DistanceBKT := \mathbf{sqrt}\left((xB - xKT)^2 + (yB - yKT)^2 + (zB - zKT)^2\right)$

$$DistanceBKT := 7.712039703\ 10^{6} \quad (51)$$

ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΒΕΡΟΙΑΣ-ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ: $DistanceBKT := 7.71203970\,3\ 10^{6}\ m(\sim 7712\ km)$

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΠΑΝΩ ΣΤΗΝ ΥΔΡΟΓΕΙΟ ΣΦΑΙΡΑ .

1. ΒΕΡΟΙΑ

> $BPLATOS := spacecurve\left(\left[R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[B]\right)\cdot\cos(\phi), R[e]\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP[B]\right)\cdot\sin(\phi), R[e]\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - GP[B]\right)\right], \phi = 0..2\cdot\mathrm{Pi}, color = red, thickness = 2\right):$

```
> BMHKOS := spacecurve( [R[e]·sin(θ)·cos(GM[B]), R[e]·sin(θ)·sin(GM[B]), R[e]
      ·cos(θ) ], θ = 0 ..2· Pi, color = blue, thickness = 2 ) :
> Ber := pointplot3d( [ R[e]·sin( π/2 − GP[B] )·cos(GM[B]), R[e]·sin( π/2 − GP[B] )
      ·sin(GM[B]), R[e]·cos( π/2 − GP[B] ) ], symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color
      = red ) :
> BEROIA := textplot3d( [ 1.1· R[e]·sin( π/2 − (GP[B]-0.1) )·cos(GM[B] + 0.1), 1.1· R[e]
      ·sin( π/2 − (GP[B]-0.1) )·sin(GM[B] + 0.1), 1.1· R[e]·cos( π/2 − (GP[B]-0.1) ),
      "B" ], font = [ arial, bold, 15 ] ) :
> A1 := display(BPLATOS, BMHKOS, Ber, BEROIA) :
>
```

2. ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ

```
> GPLATOS := spacecurve( [ R[e]·sin( π/2 − GP[GR] )·cos(φ), R[e]·sin( π/2 − GP[GR] )
      ·sin(φ), R[e]·cos( π/2 − GP[GR] ) ], φ = 0 ..2·Pi, color = red, thickness = 2 ) :
> GMHKOS := spacecurve( [R[e]·sin(θ)·cos(GM[GR]), R[e]·sin(θ)·sin(GM[GR]), R[e]
      ·cos(θ) ], θ = 0 ..Pi, color = BLACK, thickness = 4 ) :
> GRee := pointplot3d( [ R[e]·sin( π/2 − GP[GR] )·cos(GM[GR]), R[e]·sin( π/2
      − GP[GR] )·sin(GM[GR]), R[e]·cos( π/2 − GP[GR] ) ], symbol = solidcircle,
      symbolsize = 10, color = green ) :
> GREEN := textplot3d( [ 1.1· R[e]·sin( π/2 − (GP[GR]-0.1) )·cos(GM[GR] + 0.1), 1.1
      · R[e]·sin( π/2 − (GP[GR]-0.1) )·sin(GM[GR] + 0.1), 1.1· R[e]·cos( π/2 − (GP[GR]
      -0.1) ), "GR" ], font = [ arial, bold, 15 ] ) :
> A2 := display(GPLATOS, GMHKOS, GRee, GREEN) :
> L1 := display( line( [ R[e]·sin( π/2 − GP[B] )·cos(GM[B]), R[e]·sin( π/2 − GP[B] )
      ·sin(GM[B]), R[e]·cos( π/2 − GP[B] ) ], [ R[e]·sin( π/2 − GP[GR] )·cos(GM[GR]),
      R[e]·sin( π/2 − GP[GR] )·sin(GM[GR]), R[e]·cos( π/2 − GP[GR] ) ], color = cyan,
      thickness = 5, linestyle = 4 ) ) :
```

3. ΜΟΣΧΑ

```
> MPLATOS := spacecurve([R[e]·sin(π/2 − GP[M])·cos(ϕ), R[e]·sin(π/2 − GP[M])
      ·sin(ϕ), R[e]·cos(π/2 − GP[M])], ϕ = 0..2·Pi, color = red, thickness = 2) :
> MMHKOS := spacecurve([R[e]·sin(θ)·cos(GM[M]), R[e]·sin(θ)·sin(GM[M]), R[e]
      ·cos(θ)], θ = 0..Pi, color = blue, thickness = 2) :
> Mos := pointplot3d([R[e]·sin(π/2 − GP[M])·cos(GM[M]), R[e]·sin(π/2 − GP[M])
      ·sin(GM[M]), R[e]·cos(π/2 − GP[M])], symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color
      = green) :
> MOSXA := textplot3d([1.1·R[e]·sin(π/2 − (GP[M]-0.1))·cos(GM[M] + 0.1), 1.1
      ·R[e]·sin(π/2 − (GP[M]-0.1))·sin(GM[M] + 0.1), 1.1·R[e]·cos(π/2 − (GP[M]
      -0.1)), "M"], font = [arial, bold, 15]) :
> A3 := display(MPLATOS, MMHKOS, Mos, MOSXA) :
> L2 := display(line([R[e]·sin(π/2 − GP[B])·cos(GM[B]), R[e]·sin(π/2 − GP[B])
      ·sin(GM[B]), R[e]·cos(π/2 − GP[B])], [R[e]·sin(π/2 − GP[M])·cos(GM[M]),
      R[e]·sin(π/2 − GP[M])·sin(GM[M]), R[e]·cos(π/2 − GP[M])], color = cyan,
      thickness = 5, linestyle = 1)) :
```

4. ΣΙΔΝΕΫ

```
> SPLATOS := spacecurve([R[e]·sin(π/2 + GP[S])·cos(ϕ), R[e]·sin(π/2 + GP[S])
      ·sin(ϕ), R[e]·cos(π/2 + GP[S])], ϕ = 0..2·Pi, color = red, thickness = 2) :
> SMHKOS := spacecurve([R[e]·sin(θ)·cos(GM[S]), R[e]·sin(θ)·sin(GM[S]), R[e]
      ·cos(θ)], θ = 0..Pi, color = blue, thickness = 2) :
> Sid := pointplot3d([R[e]·sin(π/2 + GP[S])·cos(GM[S]), R[e]·sin(π/2 + GP[S])
      ·sin(GM[S]), R[e]·cos(π/2 + GP[S])], symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color
      = green) :
> SIDNEY := textplot3d([1.1·R[e]·sin(π/2 + (GP[S]-0.1))·cos(GM[S] + 0.1), 1.1·R[e]
      ·sin(π/2 + (GP[S]-0.1))·sin(GM[S] + 0.1), 1.1·R[e]·cos(π/2 + (GP[S]-0.1)),
      "S"], font = [arial, bold, 15]) :
```

```
> A4 := display(SPLATOS, SMHKOS, Sid, SIDNEY) :
> L3 := display(line([[R[e]·sin(π/2 − GP[B])·cos(GM[B]), R[e]·sin(π/2 − GP[B])
      ·sin(GM[B]), R[e]·cos(π/2 − GP[B])], [R[e]·sin(π/2 + GP[S])·cos(GM[S]), R[e]
      ·sin(π/2 + GP[S])·sin(GM[S]), R[e]·cos(π/2 + GP[S])], color = cyan, thickness = 5,
      linestyle = 4)) :
```

5. ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ

```
> LAPLATOS := spacecurve([R[e]·sin(π/2 − GP[LA])·cos(ϕ), R[e]·sin(π/2 − GP[LA])
      ·sin(ϕ), R[e]·cos(π/2 − GP[LA])], ϕ = 0..2·Pi, color = red, thickness = 2) :
> LAMHKOS := spacecurve([R[e]·sin(θ)·cos(−GM[LA]), R[e]·sin(θ)·sin(−GM[LA]),
      R[e]·cos(θ)], θ = 0..Pi, color = blue, thickness = 2) :
> LAnt := pointplot3d([R[e]·sin(π/2 − GP[LA])·cos(−GM[LA]), R[e]·sin(π/2
      − GP[LA])·sin(−GM[LA]), R[e]·cos(π/2 − GP[LA])], symbol = solidcircle,
      symbolsize = 10, color = green) :
> LOSANTZELES := textplot3d([1.1·R[e]·sin(π/2 − (GP[LA]−0.1))·cos(−GM[LA]
      + 0.1), 1.1·R[e]·sin(π/2 − (GP[LA]−0.1))·sin(−GM[LA] + 0.1), 1.1·R[e]·cos(π/2
      − (GP[LA]−0.1)), "LA"], font = [arial, bold, 15]) :
> A5 := display(LAPLATOS, LAMHKOS, LAnt, LOSANTZELES) :
> L4 := display(line([[R[e]·sin(π/2 − GP[B])·cos(GM[B]), R[e]·sin(π/2 − GP[B])
      ·sin(GM[B]), R[e]·cos(π/2 − GP[B])], [R[e]·sin(π/2 − GP[LA])·cos(−GM[LA]),
      R[e]·sin(π/2 − GP[LA])·sin(−GM[LA]), R[e]·cos(π/2 − GP[LA])], color = cyan,
      thickness = 5, linestyle = 4)) :
```

6. ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ

```
> KTPLATOS := spacecurve([R[e]·sin(π/2 + GP[KT])·cos(ϕ), R[e]·sin(π/2 + GP[KT])
      ·sin(ϕ), R[e]·cos(π/2 + GP[KT])], ϕ = 0..2·Pi, color = red, thickness = 2) :
> KTMHKOS := spacecurve([R[e]·sin(θ)·cos(GM[KT]), R[e]·sin(θ)·sin(GM[KT]),
      R[e]·cos(θ)], θ = 0..Pi, color = blue, thickness = 2) :
> KTao := pointplot3d([R[e]·sin(π/2 + GP[KT])·cos(GM[KT]), R[e]·sin(π/2
```

$$+ GP[KT]\Big)\cdot\sin(GM[KT]),\ R[e]\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{2}+GP[KT]\Big)\Big],\ symbol=solidcircle,$$

$$symbolsize=10,\ color=green\Big):$$

> $$KEIPTAOYN := textplot3d\Big(\Big[1.1\cdot R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}+(GP[KT]-0.1)\Big)\cdot\cos(GM[KT]+0.1),$$

$$1.1\cdot R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}+(GP[KT]-0.1)\Big)\cdot\sin(GM[KT]+0.1),\ 1.1\cdot R[e]\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{2}$$

$$+(GP[KT]-0.1)\Big),\ \text{"KT"}\Big],\ font=[arial,\ bold,\ 15]\Big):$$

> $$A6 := display(KTPLATOS,\ KTMHKOS,\ KTao,\ KEIPTAOYN):$$

> $$L5 := display\Big(line\Big(\Big[R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}-GP[B]\Big)\cdot\cos(GM[B]),\ R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}-GP[B]\Big)$$

$$\cdot\sin(GM[B]),\ R[e]\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{2}-GP[B]\Big)\Big],\Big[R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}+GP[KT]\Big)\cdot\cos(GM[KT]),$$

$$R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}+GP[KT]\Big)\cdot\sin(GM[KT]),\ R[e]\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{2}+GP[KT]\Big)\Big],\ color=cyan,$$

$$thickness=5,\ linestyle=4\Big)\Big):$$

7. ΥΔΡΟΓΕΙΟΣ ΜΕ ΙΣΗΜΕΡΙΝΟ ΑΞΟΝΑ & ΒΟΡΡΑ

> $$ISHMERINOS := spacecurve\Big(\Big[R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\cdot\cos(\phi),\ R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\cdot\sin(\phi),\ R[e]$$

$$\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big)\Big],\ \phi=0..2\cdot Pi,\ color=black,\ thickness=4\Big):$$

> $$GH := plot3d([R[e]\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\phi),\ R[e]\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\phi),\ R[e]\cdot\cos(\theta)],\ \theta=0..Pi,\ \phi=0$$

$$..2\cdot Pi):$$

> $$AKSONZ := spacecurve([0,\ 0,\ R[e]\cdot 1.2 - m\cdot(R[e]\cdot 2\cdot 1.2)],\ m=0..1,\ color=black,$$

$$thickness=5):$$

> $$AKSONX := spacecurve([R[e]-m\cdot 2\cdot R[e],\ 0,\ 0],\ m=0..1,\ color=black,\ thickness=3,$$

$$linestyle=2):$$

> $$AKSONY := spacecurve([0,\ R[e]-m\cdot 2\cdot R[e],\ 0],\ m=0..1,\ color=black,\ thickness=3,$$

$$linestyle=2):$$

> $$BORRAS := textplot3d([0,\ 0,\ 1.25\ R[e],\ \text{"Nord"}],\ font=[arial,\ bold,\ 14]):$$

> $$KENTROGHS := pointplot3d([0,\ 0,\ 0],\ symbol=solidcircle,\ symbolsize=5,\ color$$

$$=yellow):$$

> $$A7 := display(ISHMERINOS,\ GH,\ AKSONZ,\ AKSONX,\ AKSONY,\ BORRAS,$$

$$KENTROGHS):$$

8. ΑΝΤΙΔΙΑΜΕΤΡΙΚΟ ΤΗΣ ΒΕΡΟΙΑΣ

> $$ANB := pointplot3d\Big(\Big[-R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}-GP[B]\Big)\cdot\cos(GM[B]),-R[e]\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{2}-GP[B]\Big)$$

$$\cdot\sin(GM[B]),-R[e]\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{2}-GP[B]\Big)\Big],\ symbol=solidcircle,\ symbolsize=15,\ color$$

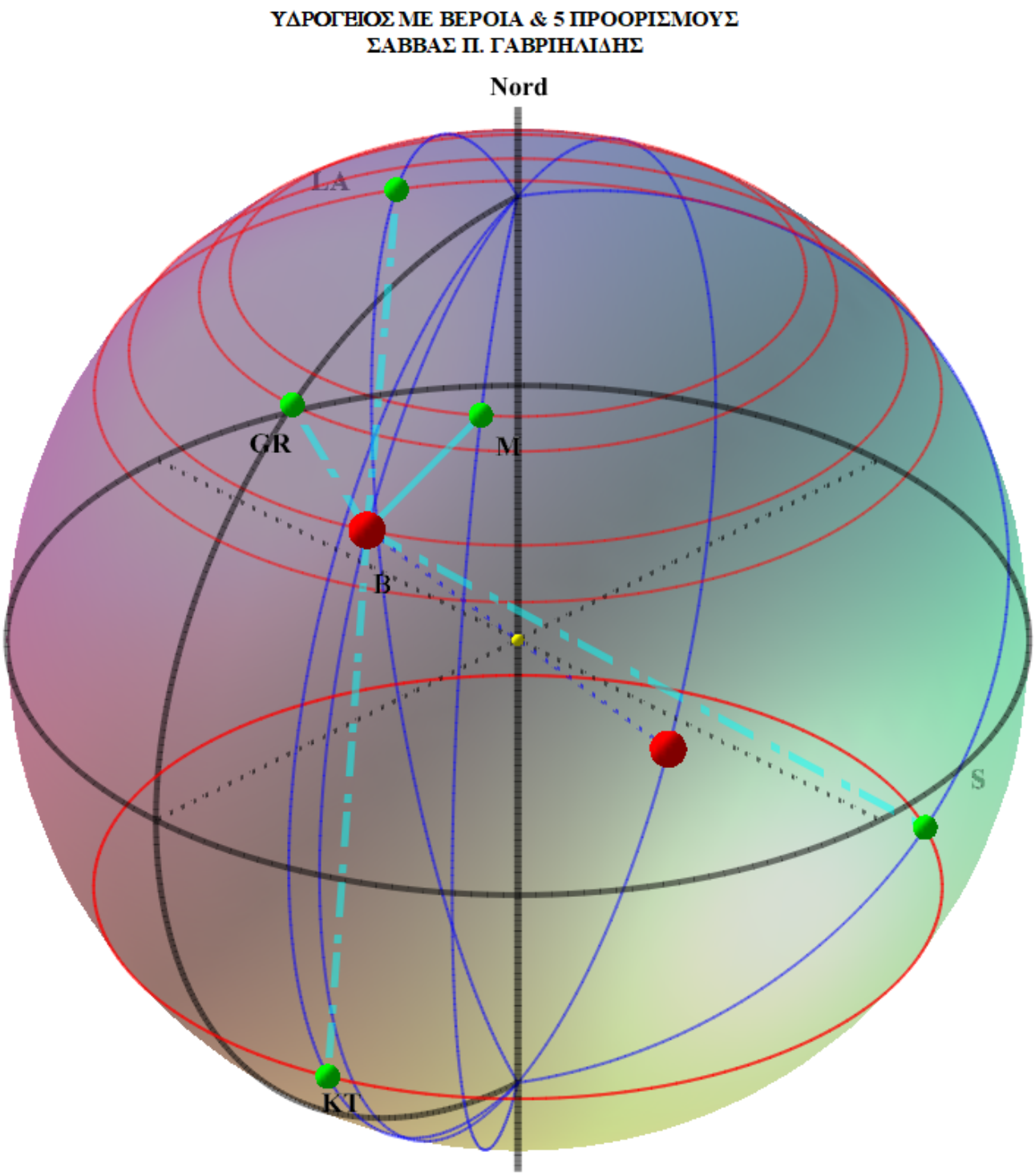
$$=red\Big):$$

> $$ANB1 := spacecurve([xB\cdot(1-2\cdot\lambda),\ yB\cdot(1-2\cdot\lambda),\ zB\cdot(1-2\cdot\lambda)],\ \lambda=0..1,\ color$$

$$=blue,\ thickness=3,\ linestyle=2):$$

>

```
>
> SYNOLO := display(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, L1, L2, L3, L4, L5, ANB, ANB1, orientation
      = [45, 60, 0], axes = none) :
> display(SYNOLO, scaling = constrained, axes = none, style = surface, transparency = 0.50,
      title = "ΥΔΡΟΓΕΙΟΣ ΜΕ ΒΕΡΟΙΑ & 5 ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΥΣ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ",
      titlefont = [arial, bold, 12]) :
```



ANIMATION

Τα μήκη L είναι σε μέτρα

Οι ταχύτητες V σε m/s
Οι επιταχύνσεις A σε m/s^2

Οι χρόνοι σε s

> $sol := x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

$$sol := x(t) = x_0 \cos(\omega t) \quad (52)$$

> $V := diff(rhs(sol), t)$

$$V := -x_0 \omega \sin(\omega t) \quad (53)$$

> $A := diff(rhs(sol), t\$2)$

$$A := -x_0 \omega^2 \cos(\omega t) \quad (54)$$

I. ΒΕΡΟΙΑ-ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ

> $LI := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBGR\,\mathrm{m}, \omega = \omega 1, t = t\,\mathrm{s}\right\}, rhs(sol)\right)\right)$

$$LI := 1.040370764\ 10^6 \cos(0.001242236714\ t)\ \mathrm{m} \quad (55)$$

> $LIa := 1.040370764\ 10^6 \cos(0.001242236714\ t)$:

> $VI := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBGR\,\mathrm{m}, \omega = \omega 1, t = t\,\mathrm{s}\right\}, V\right)\right)$

$$VI := -1292.386759 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (56)$$

> $convert(\ combine(\ \mathbf{(56)}, 'units'), 'units', 'km/h')$

$$-4652.592332 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \quad (57)$$

> $AI := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBGR\,\mathrm{m}, \omega = \omega 1, t = t\,\mathrm{s}\right\}, A\right)\right)$

$$AI := -1.605450281 \cos(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad (58)$$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΒΕΡΟΙΑ-ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ

> $XI := xB + \lambda \cdot (xGR - xB)$:

> $YI := yB + \lambda \cdot (yGR - yB)$:

> $ZI := zB + \lambda \cdot (zGR - zB)$:

> $AN1 := animate(pointplot3d, [[XI, YI, ZI], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 10], \lambda = 0..1, frames = 50)$:

II. ΒΕΡΟΙΑ-ΜΟΣΧΑ

> $LII := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBM\,\mathrm{m}, \omega = \omega 1, t = t\,\mathrm{s}\right\}, rhs(sol)\right)\right)$

$$LII := 1.012558916\ 10^6 \cos(0.001242236714\ t)\ \mathrm{m} \quad (59)$$

> $LIIa := 1.012558916\ 10^{6} \cos(0.001242236714\ t)$:

> $VII := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBM\,\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\,\mathrm{s}\right\}, V\right)\right)$

$$VII := -1257.837861 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \textbf{(60)}$$

> $convert(\ combine(\ \textbf{(60)}, 'units'), 'units', 'km/h')$

$$-4528.216300 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \quad \textbf{(61)}$$

> $AII := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBM\,\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\,\mathrm{s}\right\}, A\right)\right)$

$$AII := -1.562532371 \cos(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \textbf{(62)}$$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΒΕΡΟΙΑ-ΜΟΣΧΑ

> $XII := xB + \lambda \cdot (xM - xB)$:

> $YII := yB + \lambda \cdot (yM - yB)$:

> $ZII := zB + \lambda \cdot (zM - zB)$:

> $AN2 := animate(pointplot3d, [[XII, YII, ZII], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 10], \lambda = 0..1, frames = 50)$:

III. ΒΕΡΟΙΑ-ΣΙΔΝΕΫ

> $LIII := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBS\,\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\,\mathrm{s}\right\}, rhs(sol)\right)\right)$

$$LIII := 5.974502450\ 10^{6} \cos(0.001242236714\ t)\ \mathrm{m} \quad \textbf{(63)}$$

> $LIIIa := 5.974502450\ 10^{6} \cos(0.001242236714\ t)$:

> $VIII := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBS\,\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\,\mathrm{s}\right\}, V\right)\right)$

$$VIII := -7421.746291 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \textbf{(64)}$$

> $convert(\ combine(\ \textbf{(64)}, 'units'), 'units', 'km/h')$

$$-26718.28665 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \quad \textbf{(65)}$$

> $AIII := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBS\,\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\,\mathrm{s}\right\}, A\right)\right)$

$$AIII := -9.219565727 \cos(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad \textbf{(66)}$$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΒΕΡΟΙΑ-ΣΙΔΝΕΫ

> $XIII := xB + \lambda \cdot (xS - xB)$:

> $YIII := yB + \lambda \cdot (yS - yB)$:

> $ZIII := zB + \lambda \cdot (zS - zB)$:

> $AN3 := animate(pointplot3d, [[XIII, YIII, ZIII], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 10], \lambda = 0..1, frames = 50)$:

>

>

IV. ΒΕΡΟΙΑ-ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ

> $LIV := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2} \cdot DistanceBLA\,\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\,\mathrm{s}\right\}, rhs(sol)\right)\right)$

$$LIV := 4.770025946\ 10^6 \cos(0.001242236714\ t)\ \mathrm{m} \quad (67)$$

> $LIVa := 4.770025946\ 10^6 \cos(0.001242236714\ t)$:

> $VIV := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2}\cdot DistanceBLA\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\mathrm{s}\right\}, V\right)\right)$

$$VIV := -5925.501357 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (68)$$

> $convert(\ combine(\ \mathbf{(68)}, 'units'), 'units', 'km/h')$

$$-21331.80489 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \quad (69)$$

> $AIV := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2}\cdot DistanceBLA\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\mathrm{s}\right\}, A\right)\right)$

$$AIV := -7.360875336 \cos(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad (70)$$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΒΕΡΟΙΑ-ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ

> $XIV := xB + \lambda\cdot(xLA - xB)$:

> $YIV := yB + \lambda\cdot(yLA - yB)$:

> $ZIV := zB + \lambda\cdot(zLA - zB)$:

> $AN4 := animate(pointplot3d,\ [[XIV, YIV, ZIV]], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 10], \lambda = 0..1, frames = 50)$:

V. ΒΕΡΟΙΑ-ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ

> $LV := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2}\cdot DistanceBKT\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\mathrm{s}\right\}, rhs(sol)\right)\right)$

$$LV := 3.856019852\ 10^6 \cos(0.001242236714\ t)\ \mathrm{m} \quad (71)$$

> $LVa := 3.856019852\ 10^6 \cos(0.001242236714\ t)$:

> $VV := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2}\cdot DistanceBKT\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\mathrm{s}\right\}, V\right)\right)$

$$VV := -4790.089430 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad (72)$$

> $convert(\ combine(\ \mathbf{(72)}, 'units'), 'units', 'km/h')$

$$-17244.32195 \sin(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \quad (73)$$

> $AV := simplify\left(subs\left(\left\{x[0] = \frac{1}{2}\cdot DistanceBKT\mathrm{m},\ \omega = \omega 1,\ t = t\mathrm{s}\right\}, A\right)\right)$

$$AV := -5.950424955 \cos(0.001242236714\ t)\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \quad (74)$$

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΒΕΡΟΙΑ-ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ

> $XV := xB + \lambda\cdot(xKT - xB)$

$$XV := 4.483321436\ 10^6 + 532987.660\ \lambda \quad (75)$$

> $YV := yB + \lambda\cdot(yKT - yB)$

$$YV := 1.829787080\ 10^6 - 160094.484\ \lambda \quad (76)$$

> $ZV := zB + \lambda\cdot(zKT - zB)$

$$ZV := 4.138672268\ 10^6 - 7.691934106\ 10^6\ \lambda \quad (77)$$

> $AN5 := animate(pointplot3d, [[XV, YV, ZV]], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 10], \lambda = 0..1, frames = 50)$:

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΘΕΣΗΣ ΔΟΡΥΦΟΡΟΥ ΠΑΝΩ ΣΤΟΝ ΜΕΣΗΜΒΡΙΝΟ ΠΟΥ ΠΕΡΝΑΕΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΒΕΡΟΙΑ .

>

> $xD := R[e] \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(GM[B])$

$$xD := 5.897713941\ 10^{6} \sin(\theta) \quad \textbf{(78)}$$

> $yD := R[e] \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(GM[B])$

$$yD := 2.407045964\ 10^{6} \sin(\theta) \quad \textbf{(79)}$$

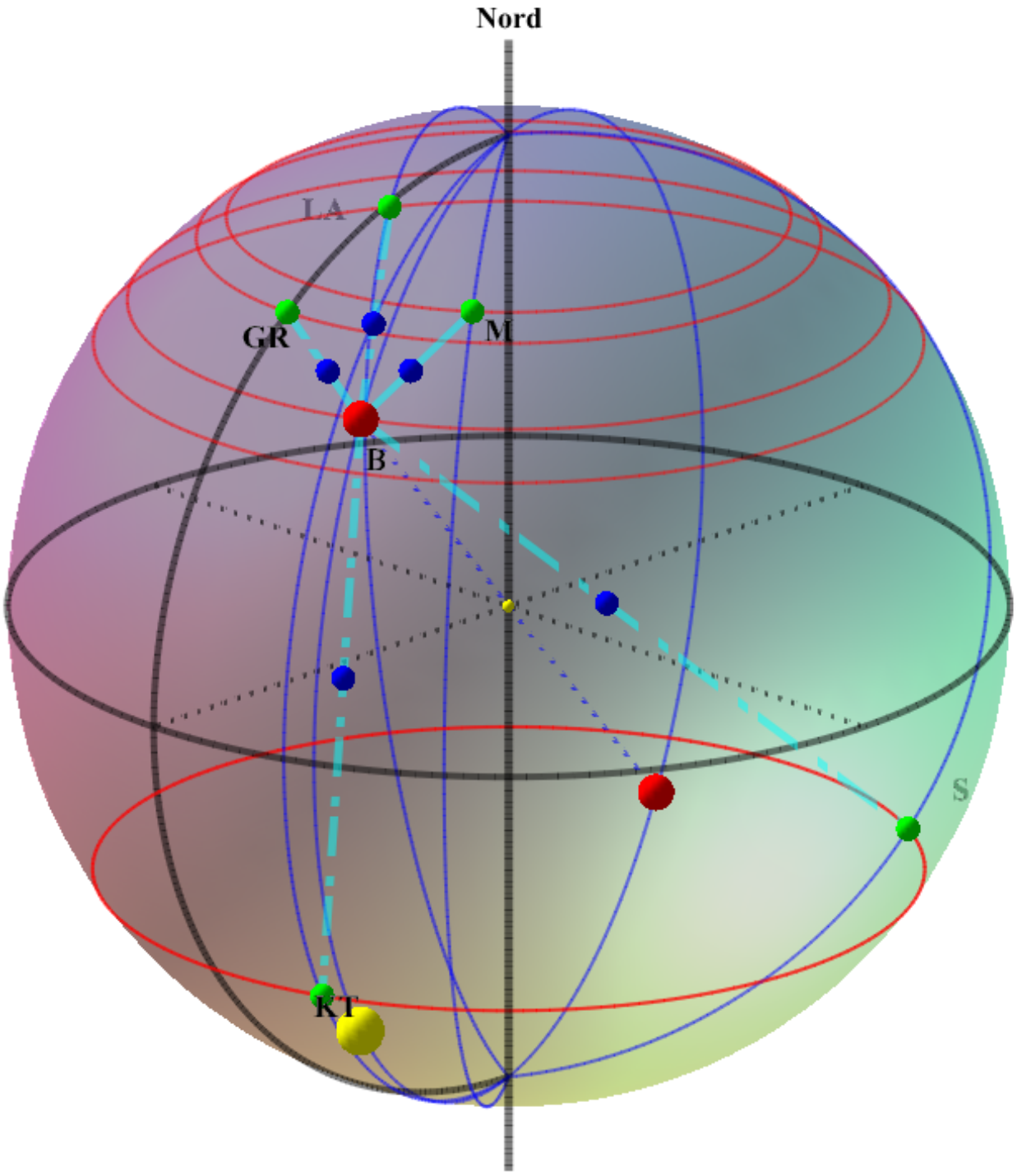
> $zD := R[e] \cdot \cos(\theta)$

$$zD := 6.37000000\ 10^{6} \cos(\theta) \quad \textbf{(80)}$$

> $AN6 := animate\left(pointplot3d, [[xD, yD, zD]], color = yellow, symbol = solidcircle, symbolsize = 20], \theta = \frac{Pi}{2} - GP[B]..\pi + \frac{Pi}{2} - GP[B], frames = 50\right)$:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ

> $display(AN1, AN2, AN3, AN4, AN5, AN6, SYNOLO, title = "ANIMATION 5 ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΩΝ ΑΠΟ ΒΕΡΟΙΑ &ΔΟΡΥΦΟΡΟΣ \nΠΡΟΣ ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ-ΜΟΣΧΑ-ΣΙΔΝΕΫ-ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ-ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 14], orientation = [45, 70, 0], labels = [x, y, z], labelfont = [arial, bold, 14], transparency = 0.5, style = surface, scaling = constrained)$:

ΑΝΙΜΑΤΙΟΝ 5 ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΩΝ ΑΠΟ ΒΕΡΟΙΑ &ΔΟΡΥΦΟΡΟΣ ΠΡΟΣ ΓΚΡΗΝΟΥΪΤΣ-ΜΟΣΧΑ-ΣΙΔΝΕΫ-ΛΟΣ ΑΝΤΖΕΛΕΣ-ΚΕΪΠ ΤΑΟΥΝ

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ