

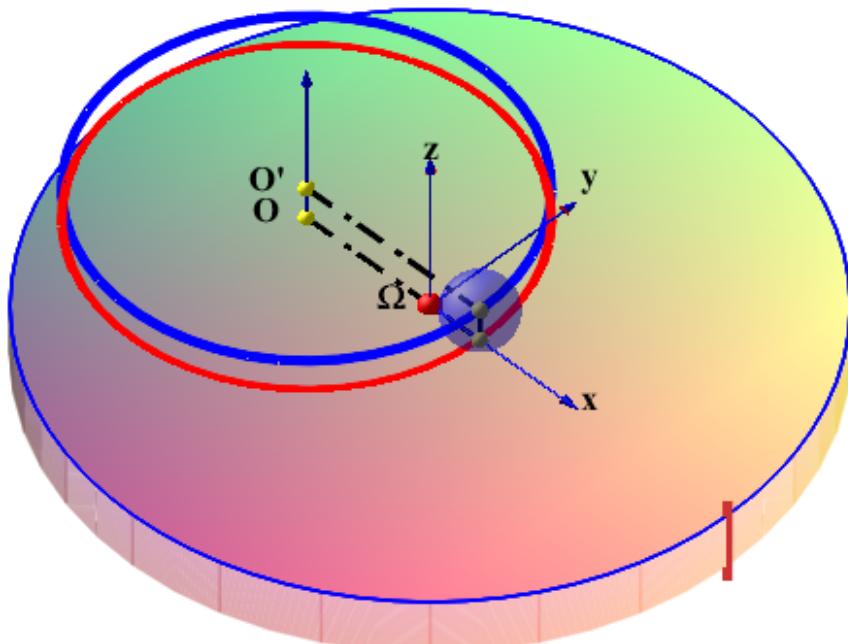
Θέμα :

Ομογενής σφαίρα με μάζα m και ακτίνα a κυλάει χωρίς ολίσθηση πάνω σε οριζόντιο επίπεδο που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω γύρω από κατακόρυφο άξονα .
Να βρεθεί η κίνηση του κέντρου μάζας G της σφαίρας .

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ :

Ανεξάρτητα από το μέγεθος της Ομογενούς σφαίρας (ακτίνα , μάζα) ,
το κέντρο μάζας G της Σφαίρας διαγράφει κύκλο με κέντρο $O' \left(-\frac{5x_0}{2}, 0, a \right)$, ακτίνας $\frac{7}{2} \cdot x_0$, με Γωνιακή ταχύτητα $\frac{2 \cdot \Omega}{7}$.
Σε κάθε πλήρη στροφή του G αντιστοιχούν $\frac{7}{2}$ στροφές του υποκείμενου επιπέδου !!!

ΣΦΑΙΡΑ ΚΥΛΙΟΜΕΝΗ ΠΑΝΩ ΣΕ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



```
> with(plots) :  
> with(plottools) :  
> with(Physics[Vectors]) :  
> Setup(mathematicalnotation = true) :  
> Ω := [0, 0, 0]
```

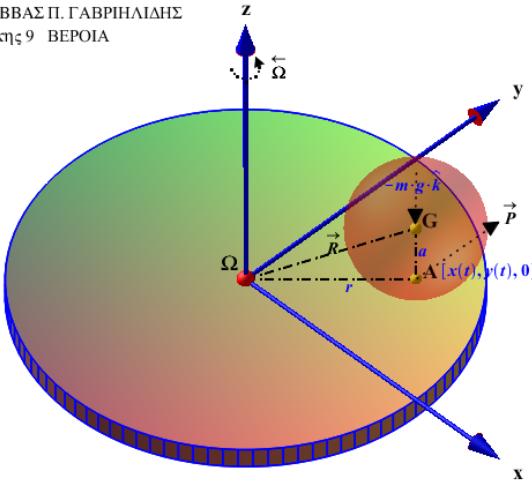
```

 $\Omega := [0, 0, 0]$  (1)
> A := [xA, yA, 0]  $A := [xA, yA, 0]$  (2)
= > G := [xA, yA, zA]  $G := [xA, yA, zA]$  (3)

 $a := 3$   $a := 3$  (4)
> xA := 5  $xA := 5$  (5)
> yA := 5  $yA := 5$  (6)
> zA := a  $zA := 3$  (7)

> SFAIRA := plot3d( [xA + a·sin(θ)·cos(ϕ), yA + a·sin(θ)·sin(ϕ), zA + a·cos(θ) ], θ = 0 .. Pi,
    ϕ = 0 .. 2·Pi, style = surface, color = red, transparency = 0.70, ) :
> EPIPEDO := cylinder( [0, 0, 0], 10, -1, strips = 100 ) :
> pA := pointplot3d(A, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = yellow) :
> pG := pointplot3d(G, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = yellow) :
> pΩ := pointplot3d(Ω, symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = RED) :
> opts := (color = black, thickness = 2, linestyle = 4) :
> ΩA := line(Ω, A, opts) :
> ΩG := line(Ω, G, opts) :
> GA := line(G, A, opts) :
> Xar := arrow(⟨0, 0, 0⟩, ⟨15, 0, 0⟩, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :
> Yar := arrow(⟨0, 0, 0⟩, ⟨0, 15, 0⟩, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :
> Zar := arrow(⟨0, 0, 0⟩, ⟨0, 0, 15⟩, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :
> Xtext := textplot3d([16, 0, 0, "x"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ytext := textplot3d([0, 16, 0, "y"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ztext := textplot3d([0, 0, 16, "z"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ωtext := textplot3d([-0.5, -0.5, 1, "Ω"], font = [arial, bold, 14]) :
> Atext := textplot3d([xA + 0.4, yA + 0.4, 0 + 0.5, "A"], font = [arial, bold, 14]) :
> Gtext := textplot3d([xA + 0.4, yA + 0.4, zA + 0.5, "G"], font = [arial, bold, 14]) :
> display(Ωtext, Xar, Yar, Zar, Xtext, Ytext, Ztext, pA, pG, pΩ, Ωtext, Atext, Gtext, ΩA, ΩG, GA,
    SFAIRA, EPIPEDO, scaling = constrained, axes = normal, orientation = [-45, 45, 0], axes
    = none) :

```



Βασικό : Η ταχύτητα του Λ , σημείουν επαφής της Σφαιράς και του Επιπέδου, έχει την ίδια τιμή ως προς το Αδρανεικό Σύστημα Ωχυζ.
 $\vec{u}_{A\Sigma} = \vec{u}_{AE}$

ΟΡΙΣΜΟΙ

$$\text{Ορμή : } \vec{p} = \vec{m} \cdot \vec{u}$$

$$\text{Δύναμη : } \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}$$

Ροπή αδρανείας Συμπαγούς Σφαιρώς μάζας m και ακτίνας a ως προς μία διάμετρό της :

$$I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot a^2$$

Στροφορμή (μέτρο) Σφαιράς περιστρεφόμενης περί μία διάμετρό της με γωνιακή ταχύτητα ω :

$$L = I \cdot \omega = \frac{2}{5} \cdot m \cdot a^2 \cdot \omega$$

$$\vec{L} = \vec{a} \times \vec{p}$$

Η ροπή που δρά πάνω σε ένα σώμα ισούται με τον ως προς τον χρόνο ρυθμό μεταβολής της Στροφορμής του σώματος :

$$\vec{\tau} = \vec{a} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{L}$$

```
> restart
> with(Physics[Vectors]):
> Setup(mathematicalnotation=true):
> with(plots):
>  $\Omega := \Omega \cdot k$ 
>  $GA := -a \cdot k$ 
>  $\Omega A := x(t) \cdot i + y(t) \cdot j$ 
>  $R := -GA + \Omega A$ 
>  $uG := diff(R, t)$ 
>  $aG := diff(uG, t)$ 
>  $m \cdot aG = -m \cdot g \cdot k + P$ 
> isolate((14), P)
>  $\tau := -a \cdot k \times rhs((15))$ 
```

$$\vec{\Omega} := \Omega \hat{k} \quad (8)$$

$$\vec{GA} := -a \hat{k} \quad (9)$$

$$\vec{\Omega A} := x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} \quad (10)$$

$$\vec{R} := a \hat{k} + x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} \quad (11)$$

$$\vec{uG} := \dot{x}(t) \hat{i} + \dot{y}(t) \hat{j} \quad (12)$$

$$\vec{aG} := \ddot{x}(t) \hat{i} + \ddot{y}(t) \hat{j} \quad (13)$$

$$m (\ddot{x}(t) \hat{i} + \ddot{y}(t) \hat{j}) = -m g \hat{k} + \vec{P} \quad (14)$$

$$\vec{P} = m (\ddot{x}(t) \hat{i} + \ddot{y}(t) \hat{j}) + m g \hat{k} \quad (15)$$

$$\vec{\tau} := a \ddot{y}(t) m \hat{i} - a \ddot{x}(t) m \hat{j} \quad (16)$$

$$> \frac{2}{5} \cdot m \cdot a^2 \cdot \text{diff}(\omega_-(t), t) = \tau_-$$

$$\frac{2 m a^2 \dot{\vec{\omega}}(t)}{5} = a \ddot{\vec{y}}(t) m \hat{i} - a \ddot{\vec{x}}(t) m \hat{j} \quad (17)$$

$$> \text{simplify}(\text{isolate}((17), \text{diff}(\omega_-(t), t)), \text{symbolic})$$

$$\dot{\vec{\omega}}(t) = -\frac{5 (\ddot{\vec{x}}(t) \hat{j} - \ddot{\vec{y}}(t) \hat{i})}{2 a} \quad (18)$$

ΤΙΜΗ ΤΗΣ $\dot{\vec{\omega}}(t)$ ΠΡΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ !

$$\dot{\vec{\omega}}(t) = \frac{5 (\ddot{\vec{y}}(t) \hat{i} - \ddot{\vec{x}}(t) \hat{j})}{2 a}$$

$$> uAE := \Omega_- \times (x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j})$$

$$uAE := -\Omega y(t) \hat{i} + \Omega x(t) \hat{j} \quad (19)$$

$$> uAS := uG_- + \omega_-(t) \times (-a \cdot \hat{k})$$

$$uAS := \dot{\vec{x}}(t) \hat{i} + \dot{\vec{y}}(t) \hat{j} - a (\dot{\vec{\omega}}(t) \times \hat{k}) \quad (20)$$

$$> (19) = (20)$$

$$-\Omega y(t) \hat{i} + \Omega x(t) \hat{j} = \dot{\vec{x}}(t) \hat{i} + \dot{\vec{y}}(t) \hat{j} - a (\dot{\vec{\omega}}(t) \times \hat{k}) \quad (21)$$

$$> \text{diff}(lhs((21)), t) = \text{diff}(rhs((21)), t)$$

$$-\Omega \dot{\vec{y}}(t) \hat{i} + \Omega \dot{\vec{x}}(t) \hat{j} = \ddot{\vec{x}}(t) \hat{i} + \ddot{\vec{y}}(t) \hat{j} - a (\dot{\vec{\omega}}(t) \times \hat{k}) \quad (22)$$

$$> \text{simplify}(\text{algsubs}((18), (22)), \text{symbolic})$$

$$\Omega (\dot{\vec{x}}(t) \hat{j} - \dot{\vec{y}}(t) \hat{i}) = \frac{7 \ddot{\vec{x}}(t) \hat{i}}{2} + \frac{7 \ddot{\vec{y}}(t) \hat{j}}{2} \quad (23)$$

$$> lhs((23)) - rhs((23)) = 0$$

$$\hat{i} \left(-\Omega \dot{\vec{y}}(t) - \frac{7 \ddot{\vec{x}}(t)}{2} \right) + \hat{j} \left(\Omega \dot{\vec{x}}(t) - \frac{7 \ddot{\vec{y}}(t)}{2} \right) = 0 \quad (24)$$

$$> \text{Component}(lhs((24)), 1) = 0$$

$$-\Omega \dot{\vec{y}}(t) - \frac{7 \ddot{\vec{x}}(t)}{2} = 0 \quad (25)$$

$$> \text{Component}(lhs((24)), 2) = 0$$

$$\Omega \dot{\vec{x}}(t) - \frac{7 \ddot{\vec{y}}(t)}{2} = 0 \quad (26)$$

$$> sys := (25), (26)$$

$$sys := -\Omega \dot{\vec{y}}(t) - \frac{7 \ddot{\vec{x}}(t)}{2} = 0, \Omega \dot{\vec{x}}(t) - \frac{7 \ddot{\vec{y}}(t)}{2} = 0 \quad (27)$$

$$> ics := x(0) = x[0], D(x)(0) = 0, y(0) = 0, D(y)(0) = x[0] \cdot \Omega$$

$$ics := x(0) = x_0, D(x)(0) = 0, y(0) = 0, D(y)(0) = x_0 \Omega \quad (28)$$

$$> sol := dsolve([sys, ics])$$

$$sol := \left\{ x(t) = -\frac{5 x_0}{2} + \frac{7 x_0 \cos\left(\frac{2 \Omega t}{7}\right)}{2}, y(t) = \frac{7 \sin\left(\frac{2 \Omega t}{7}\right) x_0}{2} \right\} \quad (29)$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ :

Ανεδρήτηκα από το μέγεθος της Ομοιγενούς σφαίρας (ακτίνα , μάζα),
 το κέντρο μάζας G της Σφαίρας διαγράφει κύκλο με κέντρο $O' \left(-\frac{5x_0}{2}, 0, a \right)$, ακτίνας $\frac{7}{2} \cdot x_0$, με Γωνιακή ταχύτητα $\frac{2 \cdot \Omega}{7}$.
 Σε κάθε πλήρη στροφή του G αντιστοιχούν $\frac{7}{2}$ στροφές του υποκείμενου επιπέδου !!!

> `with(plottools) :`

ΕΦΑΡΜΟΓΗ $\Omega = 1$

> `a := 3`

$$a := 3 \quad (30)$$

> `xAA := subs({Ω = 1, x[0] = 5}, rhs(sol[1]))`

$$x_{AA} := -\frac{25}{2} + \frac{35 \cos\left(\frac{2t}{7}\right)}{2} \quad (31)$$

> `yAA := subs({Ω = 1, x[0] = 5}, rhs(sol[2]))`

$$y_{AA} := \frac{35 \sin\left(\frac{2t}{7}\right)}{2} \quad (32)$$

> `ops1 := color = yellow, symbol = solidcircle, symbolsize = 10 :`

> `AA := animate(pointplot3d, [[xAA, yAA, 0], ops1], t = 0 .. 7·Pi, frames = 80) :`

> `KYKLOS := spacecurve([xAA, yAA, 0], color = red, thickness = 5, t = 0 .. 7·Pi) :`

> `KYKLOSI := spacecurve([xAA, yAA, a], color = blue, thickness = 5, t = 0 .. 7·Pi) :`

> `KENTROKYKLOY := pointplot3d([-\frac{5}{2} · 5, 0, 0], ops1) :`

> `KKtext := textplot3d([-14.5, -2, 1, "O"], font = [arial, bold, 14]) :`

> `KENTROKYKLOYI := pointplot3d([-\frac{5}{2} · 5, 0, a], ops1) :`

> `KKtextI := textplot3d([-14.5, -2, 4, "O"], font = [arial, bold, 14]) :`

> `OAKSONAS := arrow([-\frac{5}{2} · 5, 0, 0], Vector([0, 0, 15]), 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :`

> `GG := animate(pointplot3d, [[xAA, yAA, a], ops1], t = 0 .. 7·Pi, frames = 80) :`

> `GAA := animate(spacecurve, [[xAA, yAA, m · (a - 0)], m = 0 .. 1, color = black, linestyle = 4, thickness = 3], t = 0 .. 7·Pi, frames = 80) :`

> `AKYLINDROS := animate(plot3d, [[30 · cos(φ + 1 · t), 30 · sin(φ + 1 · t), z], φ = 0 .. 2 · Pi, z = -5 .. 0, style = hidden], t = 0 .. 2 · Pi, frames = 80) :`

> `KALYMA := cylinder([0, 0, 0], 30, -0, strips = 72) :`

> `XXX := animate(spacecurve, [[30 · cos(t), 30 · sin(t), -6.5 + m · (8)], m = 0 .. 1, color = orange, linestyle = 1, thickness = 5], t = 0 .. 7 · Pi, frames = 80) :`

> `Xar := arrow(<0, 0, 0>, <15, 0, 0>, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :`

> `Yar := arrow(<0, 0, 0>, <0, 15, 0>, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :`

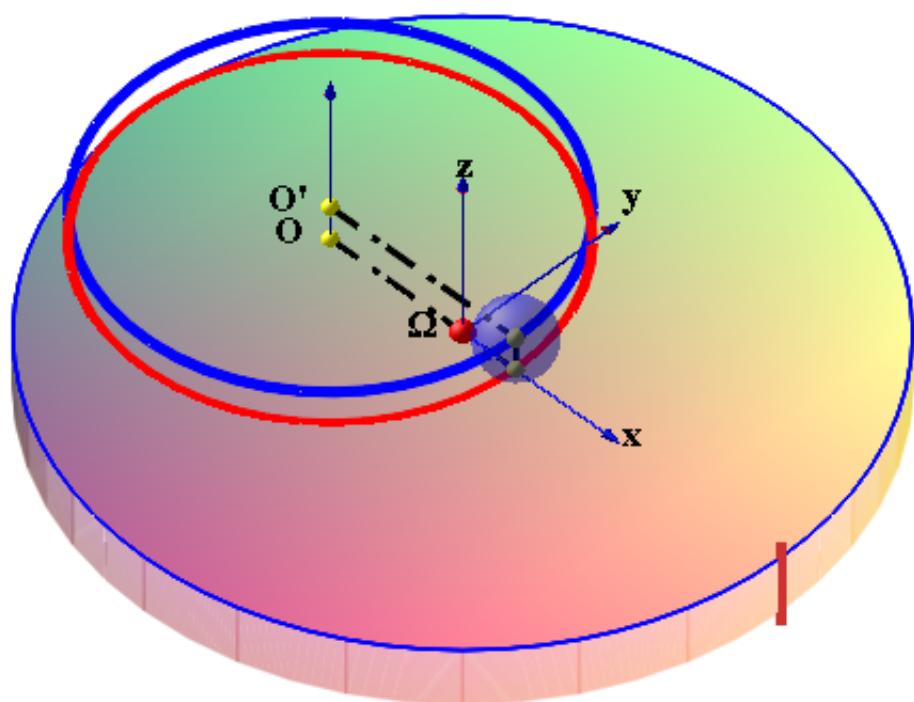
> `Zar := arrow(<0, 0, 0>, <0, 0, 15>, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :`

```

> Xtext := textplot3d([16, 0, 2, "x"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ytext := textplot3d([0, 16, 2, "y"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ztext := textplot3d([0, 0, 16, "z"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ωtext := textplot3d([-2, -2, 1, "Ω"], font = [arial, bold, 14]) :
> pΩ := pointplot3d([0, 0, 0], symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = RED) :
> OAA := animate(spacecurve, [[- $\frac{5}{2}$  · 5 + m · (xA - (- $\frac{5}{2}$  · 5)), 0 + m · (yA), 0], m = 0 .. 1,
  color = black, linestyle = 4, thickness = 3], t = 0 .. 7 · Pi, frames = 80) :
> DIAMETROS := animate(spacecurve, [[- $\frac{5}{2}$  · 5 + m · (xA - (- $\frac{5}{2}$  · 5)), 0 + m · (yA), 3], m
  = 0 .. 1, color = black, linestyle = 4, thickness = 3], t = 0 .. 7 · Pi, frames = 80) :
> ASFAIRA := animate(plot3d, [[xA + a · sin(θ) · cos(ϕ), yA + a · sin(θ) · sin(ϕ), 3 + a
  · cos(θ)], θ = 0 .. Pi, ϕ = 0 .. 2 · Pi, style = surface, color = blue, transparency = 0.50], t = 0 .. 7
  · Pi, frames = 80) :
> display(KENTROKYKLOY, KENTROKYKLOY1, KYKLOS1, KKtext1, OAKSONAS, KKtext, Xar,
  Yar, Zar, Xtext, Ytext, Ztext, Ωtext, pΩ, AA, KYKLOS, GG, GAA, AKYLINDROS, KALYMA,
  XXX, DIAMETROS, OAA, ASFAIRA, axes = none, orientation = [-45, 45, 0], scaling
  = constrained, title
  = "ANIMATION\nΣΦΑΙΡΑ ΚΥΛΙΟΜΕΝΗ ΠΑΝΩ ΣΕ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ
  ΕΠΙΠΕΔΟ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 14])

```

ANIMATION
ΣΦΑΙΡΑ ΚΥΛΙΟΜΕΝΗ ΠΑΝΩ ΣΕ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟ
ΕΠΙΠΕΔΟ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



L>