

Θέμα :

**Ομογενής σφαίρα με μάζα m και ακτίνα a κυλάει χωρίς ολίσθηση πάνω σε οριζόντιο επίπεδο που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω γύρω από κατακόρυφο άξονα .
Να βρεθεί η κίνηση του κέντρου μάζας G της σφαίρας .**

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ :

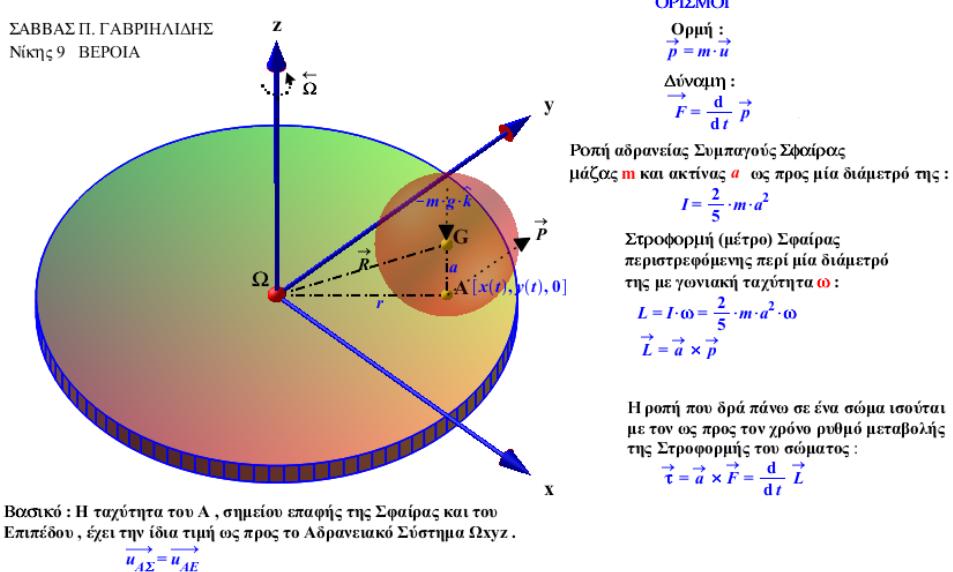
Ανεξάρτητα από το μέγεθος της Ομογενούς σφαίρας (ακτίνα , μάζα) ,
το κέντρο μάζας G της Σφαίρας διαγράφει κύκλο με κέντρο $O' \left(-\frac{5x_0}{2}, -\frac{5y_0}{2}, a \right)$, ακτίνας $\frac{7}{2} \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, με Γωνιακή ταχύτητα $\frac{2 \cdot \Omega}{7}$.
Σε κάθε πλήρη στροφή του G αντιστοιχούν $\frac{7}{2}$ στροφές του υποκείμενου επιπέδου !!!

```
> with(plots) :  
> with(plottools) :  
> with(Physics[Vectors]) :  
> Setup(mathematicalnotation = true) :  
> Ω := [0, 0, 0] 
$$\Omega := [0, 0, 0] \quad (1)$$
  
> A := [xA, yA, 0] 
$$A := [xA, yA, 0] \quad (2)$$
  
> G := [xA, yA, zA] 
$$G := [xA, yA, zA] \quad (3)$$
  
  
> a := 3 
$$a := 3 \quad (4)$$
  
> xA := 5 
$$xA := 5 \quad (5)$$
  
> yA := 5 
$$yA := 5 \quad (6)$$
  
> zA := a 
$$zA := 3 \quad (7)$$
  
> SFAIRA := plot3d([xA + a · sin(θ) · cos(ϕ), yA + a · sin(θ) · sin(ϕ), zA + a · cos(θ)], θ = 0 .. Pi,  
ϕ = 0 .. 2 · Pi, style = surface, color = red, transparency = 0.70, ) :  
> EPIPEDO := cylinder([0, 0, 0], 10, -1, strips = 100) :  
> pA := pointplot3d(A, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = yellow) :  
> pG := pointplot3d(G, symbol = solidcircle, symbolsize = 10, color = yellow) :  
> pΩ := pointplot3d(Ω, symbol = solidcircle, symbolsize = 15, color = RED) :  
> opts := (color = black, thickness = 2, linestyle = 4) :  
> ΩA := line(Ω, A, opts) :  
> ΩG := line(Ω, G, opts) :  
> GA := line(G, A, opts) :
```

```

> Xar := arrow( <0, 0, 0>, <15, 0, 0>, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :
> Yar := arrow( <0, 0, 0>, <0, 15, 0>, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :
> Zar := arrow( <0, 0, 0>, <0, 0, 15>, 0.2, 0.8, 0.1, cylindrical_arrow, fringe = red, color = blue) :
> Xtext := textplot3d( [16, 0, 0, "x"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ytext := textplot3d([0, 16, 0, "y"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ztext := textplot3d([0, 0, 16, "z"], font = [arial, bold, 14]) :
> Ωtext := textplot3d([-0.5, -0.5, 1, "Ω"], font = [arial, bold, 14]) :
> Atext := textplot3d([xA + 0.4, yA + 0.4, 0 + 0.5, "A"], font = [arial, bold, 14]) :
> Gtext := textplot3d([xA + 0.4, yA + 0.4, zA + 0.5, "G"], font = [arial, bold, 14]) :
> display( Ωtext, Xar, Yar, Zar, Xtext, Ytext, Ztext, pA, pG, pΩ, Ωtext, Atext, Gtext, ΩA, ΩG, GA,
SFAIRA, EPIPEDO, scaling = constrained, axes = normal, orientation = [-45, 45, 0], axes
= none) :

```



```

> restart
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
> with(plots) :
> Ω_ := Ω · k
> Ω_ := Ω · k

$$\vec{\Omega} := \Omega \hat{k} \tag{8}$$

> GA_ := -a · k
> GA_ := -a · k

$$\vec{GA} := -a \hat{k} \tag{9}$$

> ΩA_ := x(t) · i + y(t) · j
> ΩA_ := x(t) · i + y(t) · j

$$\vec{\Omega A} := x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} \tag{10}$$


```

$$\begin{aligned}
&> R_- := -GA_- + \Omega A_- \\
&\quad \vec{R} := a \hat{k} + x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} \tag{11} \\
&> uG_- := \text{diff}(R_-, t) \\
&\quad \vec{uG} := \dot{x}(t) \hat{i} + \dot{y}(t) \hat{j} \tag{12} \\
&> aG_- := \text{diff}(uG_-, t) \\
&\quad \vec{aG} := \ddot{x}(t) \hat{i} + \ddot{y}(t) \hat{j} \tag{13} \\
&> m \cdot aG_- = -m \cdot g \cdot k + P_- \\
&\quad m (\ddot{x}(t) \hat{i} + \ddot{y}(t) \hat{j}) = -m g \hat{k} + \vec{P} \tag{14} \\
&> \text{isolate}(\mathbf{14}), P_- \\
&\quad \vec{P} = m (\ddot{x}(t) \hat{i} + \ddot{y}(t) \hat{j}) + m g \hat{k} \tag{15} \\
&> \tau_- := -a \cdot k \times \text{rhs}(\mathbf{15}) \\
&\quad \vec{\tau} := a \ddot{y}(t) m \hat{i} - a \ddot{x}(t) m \hat{j} \tag{16} \\
&> \frac{2}{5} \cdot m \cdot a^2 \cdot \text{diff}(\omega_-(t), t) = \tau_- \\
&\quad \frac{2 m a^2 \vec{\omega}(t)}{5} = a \ddot{y}(t) m \hat{i} - a \ddot{x}(t) m \hat{j} \tag{17} \\
&> \text{simplify}(\text{isolate}(\mathbf{17}), \text{diff}(\omega_-(t), t), \text{symbolic}) \\
&\quad \vec{\omega}(t) = -\frac{5 (\ddot{x}(t) \hat{j} - \ddot{y}(t) \hat{i})}{2 a} \tag{18}
\end{aligned}$$

ΤΙΜΗ ΤΗΣ $\vec{\omega}(t)$ ΠΡΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ !

$$\vec{\omega}(t) = \frac{5 (\ddot{y}(t) \hat{i} - \ddot{x}(t) \hat{j})}{2 a}$$

$$\begin{aligned}
&> uAE := \Omega_- \times (x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j}) \\
&\quad uAE := -\Omega y(t) \hat{i} + \Omega x(t) \hat{j} \tag{19} \\
&> uAS := uG_- + \omega_-(t) \times (-a \cdot k) \\
&\quad uAS := \dot{x}(t) \hat{i} + \dot{y}(t) \hat{j} - a (\vec{\omega}(t) \times \hat{k}) \tag{20} \\
&> \mathbf{(19)} = \mathbf{(20)} \\
&\quad -\Omega y(t) \hat{i} + \Omega x(t) \hat{j} = \dot{x}(t) \hat{i} + \dot{y}(t) \hat{j} - a (\vec{\omega}(t) \times \hat{k}) \tag{21} \\
&> \text{diff}(\text{lhs}(\mathbf{21}), t) = \text{diff}(\text{rhs}(\mathbf{21}), t) \\
&\quad -\Omega \dot{y}(t) \hat{i} + \Omega \dot{x}(t) \hat{j} = \ddot{x}(t) \hat{i} + \ddot{y}(t) \hat{j} - a (\vec{\omega}(t) \times \hat{k}) \tag{22} \\
&> \text{simplify}(\text{algsubs}(\mathbf{18}, \mathbf{22}), \text{symbolic}) \\
&\quad \Omega (\dot{x}(t) \hat{j} - \dot{y}(t) \hat{i}) = \frac{7 \ddot{x}(t) \hat{i}}{2} + \frac{7 \ddot{y}(t) \hat{j}}{2} \tag{23} \\
&> \text{lhs}(\mathbf{23}) - \text{rhs}(\mathbf{23}) = 0 \\
&\quad \hat{i} \left(-\Omega \dot{y}(t) - \frac{7 \ddot{x}(t)}{2} \right) + \hat{j} \left(\Omega \dot{x}(t) - \frac{7 \ddot{y}(t)}{2} \right) = 0 \tag{24} \\
&> \text{Component}(\text{lhs}(\mathbf{24}), 1) = 0 \\
&\quad -\Omega \dot{y}(t) - \frac{7 \ddot{x}(t)}{2} = 0 \tag{25}
\end{aligned}$$

> $\text{Component}(\text{lhs}(\text{(24)}), 2) = 0$

$$\Omega \dot{x}(t) - \frac{7 \ddot{y}(t)}{2} = 0 \quad (26)$$

> $\text{sys} := \text{(25), (26)}$

$$\text{sys} := -\Omega \dot{y}(t) - \frac{7 \ddot{x}(t)}{2} = 0, \Omega \dot{x}(t) - \frac{7 \ddot{y}(t)}{2} = 0 \quad (27)$$

> $\text{ics} := \mathbf{x(0)=x[0], y(0)=y[0], D(x)(0)=-\Omega \cdot y[0], D(y)(0)=\Omega \cdot x[0]}$

$$\text{ics} := x(0) = x_0, y(0) = y_0, D(x)(0) = -\Omega y_0, D(y)(0) = \Omega x_0 \quad (28)$$

> $\text{sol} := \text{dsolve}([\text{sys}, \text{ics}])$

$$\begin{aligned} \text{sol} := & \left\{ x(t) = -\frac{5x_0}{2} - \frac{7y_0 \sin\left(\frac{2\Omega t}{7}\right)}{2} + \frac{7x_0 \cos\left(\frac{2\Omega t}{7}\right)}{2}, y(t) = \frac{7 \cos\left(\frac{2\Omega t}{7}\right) y_0}{2} \right. \\ & \left. + \frac{7 \sin\left(\frac{2\Omega t}{7}\right) x_0}{2} - \frac{5y_0}{2} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

> $\text{sol}[1]$

$$x(t) = -\frac{5x_0}{2} - \frac{7y_0 \sin\left(\frac{2\Omega t}{7}\right)}{2} + \frac{7x_0 \cos\left(\frac{2\Omega t}{7}\right)}{2} \quad (30)$$

> $\text{sol}[2]$

$$y(t) = \frac{7 \cos\left(\frac{2\Omega t}{7}\right) y_0}{2} + \frac{7 \sin\left(\frac{2\Omega t}{7}\right) x_0}{2} - \frac{5y_0}{2} \quad (31)$$

Με λίγη τριγωνομετρία μπορούμε να γράψουμε :

$$> T = \frac{\frac{2 \cdot \text{Pi}}{2 \cdot \Omega}}{7}$$

$$T = \frac{7\pi}{\Omega} \quad (32)$$

$$> A \cdot \cos(\delta) = x[0]$$

$$A \cos(\delta) = x_0 \quad (33)$$

$$> A \cdot \sin(\delta) = y[0]$$

$$A \sin(\delta) = y_0 \quad (34)$$

$$> A = \text{sqrt}((x[0])^2 + (y[0])^2)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \quad (35)$$

$$> \delta = \tan^{-1}\left(\frac{y[0]}{x[0]}\right)$$

$$(36)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \quad (36)$$

$$> x(t) = -\frac{5x_0}{2} - \frac{7}{2} \cdot A \cdot \cos\left(\left(\frac{2\Omega t}{7}\right) + \delta\right);$$

$$\begin{aligned} > -\frac{5x_0}{2} - \frac{7}{2} \cdot A \cdot \cos\left(\left(\frac{2\Omega t}{7}\right) + \delta\right) \\ & - \frac{5x_0}{2} - \frac{7A \cos\left(\frac{2\Omega t}{7} + \delta\right)}{2} \end{aligned} \quad (37)$$

$$> \text{diff}((37), t) = 0 \quad A \sin\left(\frac{2\Omega t}{7} + \delta\right) \Omega = 0 \quad (38)$$

$$> \text{isolate}((38), t) \quad t = -\frac{7\delta}{2\Omega} \quad (39)$$

$$> \text{diff}((37), t\$2) \quad \frac{2A \cos\left(\frac{2\Omega t}{7} + \delta\right) \Omega^2}{7} \quad (40)$$

$$> \text{subs}((39), (40)) \quad \frac{2A \cos(0) \Omega^2}{7} \quad (41)$$

$$> \text{minX} = \text{evalf}(\text{subs}((39), (37))) \quad \text{minX} = -2.500000000 x_0 - 3.500000000 A \quad (42)$$

$$\text{To πρώτο } \min(x(t)) \text{ για: } t = \frac{-\delta}{\frac{2 \cdot \Omega}{7}} = -\frac{\delta}{\Omega} \cdot \frac{7}{2} \quad \text{πρώτο } t = 0.$$

$$> y(x) = -\frac{5y_0}{2} + \frac{7}{2} \cdot A \cdot \sin\left(\left(\frac{2\Omega t}{7}\right) + \delta\right);$$

$$> -\frac{5y_0}{2} + \frac{7}{2} \cdot A \cdot \sin\left(\left(\frac{2\Omega t}{7}\right) + \delta\right)$$

$$-\frac{5y_0}{2} + \frac{7A \sin\left(\frac{2\Omega t}{7} + \delta\right)}{2} \quad (43)$$

> $\text{diff}((43), t) = 0$

$$A \cos\left(\frac{2\Omega t}{7} + \delta\right) \Omega = 0 \quad (44)$$

> $\text{simplify}(\text{isolate}((44), t))$

$$t = \frac{7(\pi - 2\delta)}{4\Omega} \quad (45)$$

> $\text{diff}((43), t\$2)$

$$-\frac{2A \sin\left(\frac{2\Omega t}{7} + \delta\right) \Omega^2}{7} \quad (46)$$

> $\text{subs}((45), (46))$

$$-\frac{2A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Omega^2}{7} \quad (47)$$

> $\text{maxY} = \text{evalf}(\text{subs}((45), (43)))$

$$\text{maxY} = -2.500000000 y_0 + 3.500000000 A \quad (48)$$

Το πρώτο $\text{maxy}(t)$ για : $t = \frac{7(\pi - 2\delta)}{4\Omega}$ μετά το $t = 0$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ :

Ανεξάρτητα από το μέγεθος της Ομογενούς σφαίρας (ακτίνα , μάζα) , το κέντρο μάζας G της Σφαίρας διαγράφει κύκλο με κέντρο O'($-\frac{5x_0}{2}, -\frac{5y_0}{2}, a$) , ακτίνας $\frac{7}{2} \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, με Γωνιακή ταχύτητα $\frac{2 \cdot \Omega}{7}$.

Σε κάθε πλήρη στροφή του G αντιστοιχούν $\frac{7}{2}$ στροφές του υποκείμενου επιπέδου !!!