ΤΡΟΧΙΑ ΤΟΥ ΒΛΗΜΑΤΟΣ ΟΠΩΣ ΤΗΝ ΒΛΕΠΕΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΣΗ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ

(Περιστρεφόμενος μαζί με το περιστρεφόμενο με γωνιακή ταχύτητα $\Omega=7.292^{-5}\,\frac{[\![rad]\!]}{[\![s]\!]}$ σύστημα $(B\,\hat{\theta}\,\hat{\phi}\,\hat{r})$).

ΘΕΜΑ :

Βλήμα ***P*** εκτοξεύεται από τόπο **Γεωγραφικού Πλάτους** $\left(\frac{Pi}{2}-\theta\right)$ και ύψος **H** έτσι ώστε η αρχική του ταχύτητα u_0 να σχηματίζει **γωνία α** με το οριζόντιο επίπεδο$(\hat{\theta}\,B\,\hat{\phi})$ και **β** με το κατακόρυφο επίπεδο$(\hat{\theta}\,B\,\hat{r})$.

Ο Εκτοξευτήρας περιστρέφεται περί τον κατακόρυφο άξονά του με σταθερή γωνιακή ταχύτητα , αντιλαμβάνεται τον χρόνο πρόσκρουσης του βλήματος στο οριζόντιο επίπεδο και ταυτόχρονα επαναλαμβάνει τις βολές .

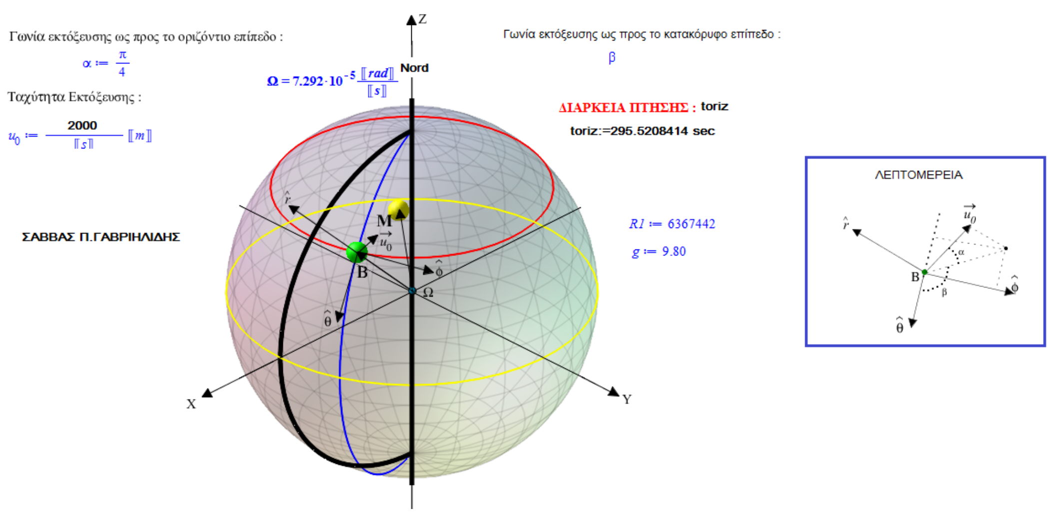
Θέλουμε να κάνει $n=20$ **βολές** με κάθε πλήρη στροφή του .

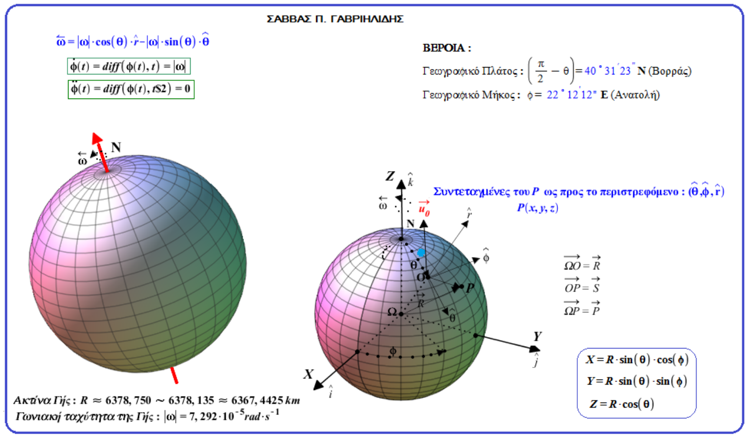
1. Να βρεθεί η θέση και ο απαιτούμενος χρόνος πρόσκρουσης στο Οριζόντιο επίπεδο $(\hat{\theta}\,B\,\hat{\phi})$.
2. Με ποιά γωνιακή ταχύτητα πρέπει να περιστρέφεται ο Εκτοξευτήρας ? .
3. Να γίνει απεικόνιση των τροχιών όπως τις βλέπει παρατηρητής ακίνητος ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα $(B\,\hat{\theta}\,\hat{\phi}\,\hat{r})$.

Παραδοχές :

Η τιμή g της επιτάχυνσης της βαρύτητας διατηρείται σταθερή .

Λαμβάνεται υπ΄όψη η Coriolis η κάθετη στο επίπεδο του Μεσημβρινού .





$$\hat{r} = \sin(\theta)\cos(\phi)\,\hat{i} + \sin(\theta)\sin(\phi)\,\hat{j} + \cos(\theta)\,\hat{k}$$

$$\hat{\theta} = \cos(\theta)\cos(\phi)\,\hat{i} + \cos(\theta)\sin(\phi)\,\hat{j} - \sin(\theta)\,\hat{k}$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin(\phi) + \hat{j}\cos(\phi)$$

```
> restart
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
> with(plots) :
> with(plottools) :
```

Δεδομένα :

> $R\_ := R \cdot \_r$

$$\vec{R} := R\,\hat{r} \quad \textbf{(1)}$$

> $S\_ := x(t) \cdot \_\theta + y(t) \cdot \_\phi + z(t) \cdot \_r$

$$\vec{S} := x(t)\,\hat{\theta} + y(t)\,\hat{\phi} + z(t)\,\hat{r} \quad \textbf{(2)}$$

> $P\_ := R\_ + S\_$

$$\vec{P} := \hat{r}\,(R + z(t)) + x(t)\,\hat{\theta} + y(t)\,\hat{\phi} \quad \textbf{(3)}$$

> $R1 := 6367442$

$$R1 := 6367442 \quad \textbf{(4)}$$

> $\Omega := 7.292 \cdot 10^{-5}$

$$\Omega := 0.00007292000000 \quad \textbf{(5)}$$

> $H := 10000$

$$H := 10000 \quad \textbf{(6)}$$

> $\alpha := \frac{\mathrm{Pi}}{4}$

$$\alpha := \frac{\pi}{4} \quad \textbf{(7)}$$

> $\beta := \beta$

$$\beta := \beta \quad \textbf{(8)}$$

> $n := 20$

$$n := 20 \tag{9}$$

> $u[0] := 2000$

$$u_0 := 2000 \tag{10}$$

> $g := 9.80$

$$g := 9.80 \tag{11}$$

> $GP1 := 0.7072607424$

$$GP1 := 0.7072607424 \tag{12}$$

> $GM1 := 0.3875212718$

$$GM1 := 0.3875212718 \tag{13}$$

> $\omega\_ := \Omega\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{GP1}\right)\cdot\_r - \Omega\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP1\right)\cdot\_\theta$

$$\vec{\omega} := 0.00004738006019\,\hat{r} - 0.00005542974199\,\hat{\theta} \tag{14}$$

> $u0\_ := -u[0]\cdot\cos(\alpha)\cos(\beta)\cdot\_\theta + u[0]\cdot\cos(\alpha)\sin(\beta)\cdot\_\phi + u[0]\cdot\sin(\alpha)\cdot\_r$

$$\overrightarrow{u0} := -1000\sqrt{2}\,\cos(\beta)\,\hat{\theta} + 1000\sqrt{2}\,\sin(\beta)\,\hat{\phi} + 1000\sqrt{2}\,\hat{r} \tag{15}$$

> $F\_ := -m\cdot g\cdot\_r$

$$\vec{F} := -9.80\,m\,\hat{r} \tag{16}$$

> $evalf\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{GP1}\right)$

$$0.8635355846 \tag{17}$$

Ανάλυση :

> $u\_ := diff(P\_, t) + \omega\_ \times P\_$

$$\vec{u} := \hat{r}\,(\dot{z}(t) - 0.00005542974199\,y(t)) + \hat{\theta}\,(\dot{x}(t) - 0.00004738006019\,y(t)) + \hat{\phi}\,(\dot{y}(t) + 0.00004738006019\,x(t) + 0.00005542974199\,R + 0.00005542974199\,z(t)) \tag{18}$$

> $a\_ := diff(u\_, t) + \omega\_ \times u\_$

$$\vec{a} := \hat{r}\,(\ddot{z}(t) - 0.0001108594840\,\dot{y}(t) - 2.626264512\;10^{-9}\,x(t) - 3.072456297\;10^{-9}\,R - 3.072456297\;10^{-9}\,z(t)) + \hat{\theta}\,(\ddot{x}(t) - 0.00009476012038\,\dot{y}(t) - 2.244870104\;10^{-9}\,x(t) - 2.626264512\;10^{-9}\,R - 2.626264512\;10^{-9}\,z(t)) + \hat{\phi}\,(\ddot{y}(t) + 0.00009476012038\,\dot{x}(t) + 0.0001108594840\,\dot{z}(t) - 5.317326401\;10^{-9}\,y(t)) \tag{19}$$

> $FYGOKENTROS := \omega\_ \times (\omega\_ \times P\_)$

$$FYGOKENTROS := -5.317326401\;10^{-9}\,y(t)\,\hat{\phi} + (-2.626264512\;10^{-9}\,x(t) - 3.072456297\;10^{-9}\,R - 3.072456297\;10^{-9}\,z(t))\,\hat{r} + (-2.244870104\;10^{-9}\,x(t) - 2.626264512\;10^{-9}\,R - 2.626264512\;10^{-9}\,z(t))\,\hat{\theta} \tag{20}$$

> $CORIOLIS := 2\cdot\omega\_ \times (diff(P\_, t))$

$$CORIOLIS := -0.0001108594840\,\hat{r}\,\dot{y}(t) - 0.00009476012038\,\hat{\theta}\,\dot{y}(t) + (0.00009476012038\,\dot{x}(t) + 0.0001108594840\,\dot{z}(t))\,\hat{\phi} \tag{21}$$

Αν αγνοηθεί η φυγόκεντρος $\vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{P}})$ **:**

> $a\_ := (19) - (20)$

$$\vec{a} := \hat{r}\,(\ddot{z}(t) - 0.0001108594840\,\dot{y}(t)) + \hat{\theta}\,(\ddot{x}(t) - 0.00009476012038\,\dot{y}(t)) + \hat{\phi}\,(\ddot{y}(t) + 0.00009476012038\,\dot{x}(t) + 0.0001108594840\,\dot{z}(t)) \quad (22)$$

ΑΝ αγνοηθεί η Coriolis κατά : $\hat{\theta} : -2\,\dot{y}(t)\,|\omega|\cos(\theta)\,\hat{\theta}$, $\hat{r} : -2\,\dot{y}(t)\,|\omega|\sin(\theta)\,\hat{r}$
θα έχουμε :

> $a\_ := (22) - \left(-2\,\dot{y}(t)\,\Omega\cos\left(\frac{\pi}{2} - GP1\right)\hat{\theta}\right) - \left(-2\,\dot{y}(t)\,\Omega\sin\left(\frac{\pi}{2} - GP1\right)\hat{r}\right)$

$$\vec{a} := \hat{r}\,\ddot{z}(t) + \hat{\theta}\,\ddot{x}(t) + \hat{\phi}\,(\ddot{y}(t) + 0.00009476012038\,\dot{x}(t) + 0.0001108594840\,\dot{z}(t)) \quad (23)$$

ΤΕΛΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΕΩΣ ΤΟΥ ΒΑΗΜΑΤΟΣ Ρ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΟ ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ :

$$\vec{a} := 2\,\dot{z}(t)\,\Omega\sin(\theta)\,\hat{\phi} + 2\,\dot{x}(t)\,\Omega\cos(\theta)\,\hat{\phi} + \ddot{z}(t)\,\hat{r} + \ddot{x}(t)\,\hat{\theta} + \ddot{y}(t)\,\hat{\phi}$$

Μπορούμε να γράψουμε :

> $-g\cdot\_r = (23)$

$$-9.80\,\hat{r} = \hat{r}\,\ddot{z}(t) + \hat{\theta}\,\ddot{x}(t) + \hat{\phi}\,(\ddot{y}(t) + 0.00009476012038\,\dot{x}(t) + 0.0001108594840\,\dot{z}(t)) \quad (24)$$

> $lhs((24)) - rhs((24)) = 0$

$$(-\ddot{y}(t) - 0.00009476012038\,\dot{x}(t) - 0.0001108594840\,\dot{z}(t))\,\hat{\phi} + (-9.80 - \ddot{z}(t))\,\hat{r} - \hat{\theta}\,\ddot{x}(t) = 0 \quad (25)$$

> $Component(lhs((25)), 1) = 0$

$$-9.80 - \ddot{z}(t) = 0 \quad (26)$$

> $Component(lhs((25)), 2) = 0$

$$-\ddot{x}(t) = 0 \quad (27)$$

> $Component(lhs((25)), 3) = 0$

$$-\ddot{y}(t) - 0.00009476012038\,\dot{x}(t) - 0.0001108594840\,\dot{z}(t) = 0 \quad (28)$$

> $Eq1 := (27)\cdot(-1)$

$$Eq1 := \ddot{x}(t) = 0 \quad (29)$$

> $Eq2 := (28)\cdot(-1)$

$$Eq2 := \ddot{y}(t) + 0.00009476012038\,\dot{x}(t) + 0.0001108594840\,\dot{z}(t) = 0 \quad (30)$$

> $Eq3 := (26)\cdot(-1)$

$$Eq3 := 9.80 + \ddot{z}(t) = 0 \quad (31)$$

> $ics1 := x(0) = 0, D(x)(0) = -u[0]\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)$

$$ics1 := x(0) = 0, D(x)(0) = -1000\sqrt{2}\cos(\beta) \quad (32)$$

> $ics3 := z(0) = \mathbf{H}, D(z)(0) = u[0]\cdot\sin(\alpha)$

$$ics3 := z(0) = 10000, D(z)(0) = 1000\sqrt{2} \quad (33)$$

> $ics2 := y(0) = 0, D(y)(0) = u[0]\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

$$ics2 := y(0) = 0, D(y)(0) = 1000\sqrt{2}\sin(\beta) \quad (34)$$

> $sol1 := dsolve(\{Eq1, ics1\})$

$$sol1 := x(t) = -1000\sqrt{2}\cos(\beta)\,t \quad (35)$$

> $sol3 := dsolve(\{Eq3, ics3\})$

$$sol3 := z(t) = -\frac{49\,t^2}{10} + 1000\sqrt{2}\,t + 10000 \quad (36)$$

> $\dot{x}(t) = diff(rhs((\mathbf{35})), t)$

$$\dot{x}(t) = -1000\sqrt{2}\cos(\beta) \quad (37)$$

> $\dot{z}(t) = diff(rhs((\mathbf{36})), t)$

$$\dot{z}(t) = -\frac{49\,t}{5} + 1000\sqrt{2} \quad (38)$$

> $subs(\{(\mathbf{37}), (\mathbf{38})\}, Eq2)$

$$\ddot{y}(t) - 0.09476012038\sqrt{2}\cos(\beta) - 0.001086422943\,t + 0.1108594840\sqrt{2} = 0 \quad (39)$$

> $sol2 := dsolve(\{(\mathbf{39}), ics2\})$

$$sol2 := y(t) = \frac{362140981\,t^3}{2000000000000} + \frac{4738006019\,t^2\sqrt{2}\cos(\beta)}{100000000000} - \frac{27714871\,t^2\sqrt{2}}{500000000} + 1000\sqrt{2}\sin(\beta)\,t \quad (40)$$

1. Χρόνος απαιτούμενος *toriz* για άφιξη του Βλήματος στο ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ επίπεδο Οθφr .

> $\boldsymbol{toriz := fsolve(subs(z(t) = 0, (36)), t = 0.1\,..\,\infty)}$

$$toriz := 295.5208414 \quad (41)$$

> $\boldsymbol{xt := evalf(subs(t = toriz, rhs((35))))}$

$$xt := -417929.5818\cos(\beta) \quad (42)$$

> $\boldsymbol{yt := evalf(subs(t = toriz, rhs((40))))}$

$$yt := -2172.780939 + 5851.764434\cos(\beta) + 417929.5818\sin(\beta) \quad (43)$$

> $\boldsymbol{zt := evalf(subs(t = toriz, rhs((36))))}$

$$zt := 0.0001 \quad (44)$$

2. Γωνιακή ταχύτητα περιστροφής Εκτοξευτήρα .

$$\boldsymbol{\Omega ekt := \frac{2\cdot \mathrm{Pi}}{n\cdot toriz}\,\frac{[\![rad]\!]}{[\![s]\!]}}$$

> $\Omega ekt := evalf\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}}{n\cdot toriz}\right)$

$$\Omega ekt := 0.001063069745 \quad (45)$$

ΤΡΟΧΙΑ ΤΟΥ ΒΛΗΜΑΤΟΣ ΟΠΩΣ ΤΗΝ ΒΛΕΠΕΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΣΗ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗΣ

(Περιστρεφόμενος μαζί με το περιστρεφόμενο με

γωνιακή ταχύτητα Ω=7.292 $^{-5}\frac{[\![rad]\!]}{[\![s]\!]}$ σύστημα (Β $\widehat{\theta}$ $\widehat{\phi}$ $\widehat{r}$)).

> $rhs(sol1)$

$$-1000\sqrt{2}\cos(\beta)\,t \quad (46)$$

> $rhs(sol2)$

$$\frac{362140981\,t^3}{2000000000000}+\frac{4738006019\,t^2\sqrt{2}\cos(\beta)}{100000000000}-\frac{27714871\,t^2\sqrt{2}}{500000000}+1000\sqrt{2}\sin(\beta)\,t \quad (47)$$

> $rhs(sol3)$

$$-\frac{49\,t^2}{10}+1000\sqrt{2}\,t+10000 \quad (48)$$

> $subs(t=toriz, \mathbf{(46)})$

$$-295520.8414\sqrt{2}\cos(\beta) \quad (49)$$

> $subs(t=toriz, \mathbf{(47)})$

$$4673.174755+4137.822314\sqrt{2}\cos(\beta)-4840.821696\sqrt{2}+295520.8414\sqrt{2}\sin(\beta) \quad (50)$$

> $subs(t=toriz, \mathbf{(48)})$

$$-417929.5817+295520.8414\sqrt{2} \quad (51)$$

> $\beta 1 := seq\left(\frac{2\cdot \mathrm{Pi}}{n}\cdot i, \mathrm{i}=0..\mathrm{n}\right)$

$$\beta 1 := 0, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{10}, \frac{4\pi}{5}, \frac{9\pi}{10}, \pi, \frac{11\pi}{10}, \frac{6\pi}{5}, \frac{13\pi}{10}, \frac{7\pi}{5}, \frac{3\pi}{2}, \frac{8\pi}{5}, \frac{17\pi}{10}, \frac{9\pi}{5}, \frac{19\pi}{10}, 2\pi \quad (52)$$

> $opts := symbol=solidcircle, symbolsize=15, color=red:$

> $BLHMA := animate\big(pointplot3d, [[subs(\beta=\beta 1[1], \mathbf{(46)}), subs(\beta=\beta 1[1], \mathbf{(47)}), subs(\beta=\beta 1[1], \mathbf{(48)})], opts], t=0..toriz, frames=80, trace=20\big):$

> $C := spacecurve\big([\mathbf{(49)}, \mathbf{(50)}, \mathbf{(51)}], \beta=0..2\cdot \mathrm{Pi}, color=red, thickness=3, linestyle=4\big):$

> $EPIFAN := plot3d\big([\mathbf{(46)}, \mathbf{(47)}, \mathbf{(48)}], t=0..toriz, \beta=0..2\cdot \mathrm{Pi}, transparency=0.50\big):$

> $BL1 := pointplot3d([\mathrm{subs}(\mathrm{t}=0, \mathbf{(46)}), \mathrm{subs}(\mathrm{t}=0, \mathbf{(47)}), \mathrm{subs}(\mathrm{t}=0, \mathbf{(48)})], symbol=solidcircle, symbolsize=25, color=red):$

> $PAR := pointplot3d([0, 0, 0], symbol=\mathrm{solidbox}, \mathrm{symbolsize}=25, color=green):$

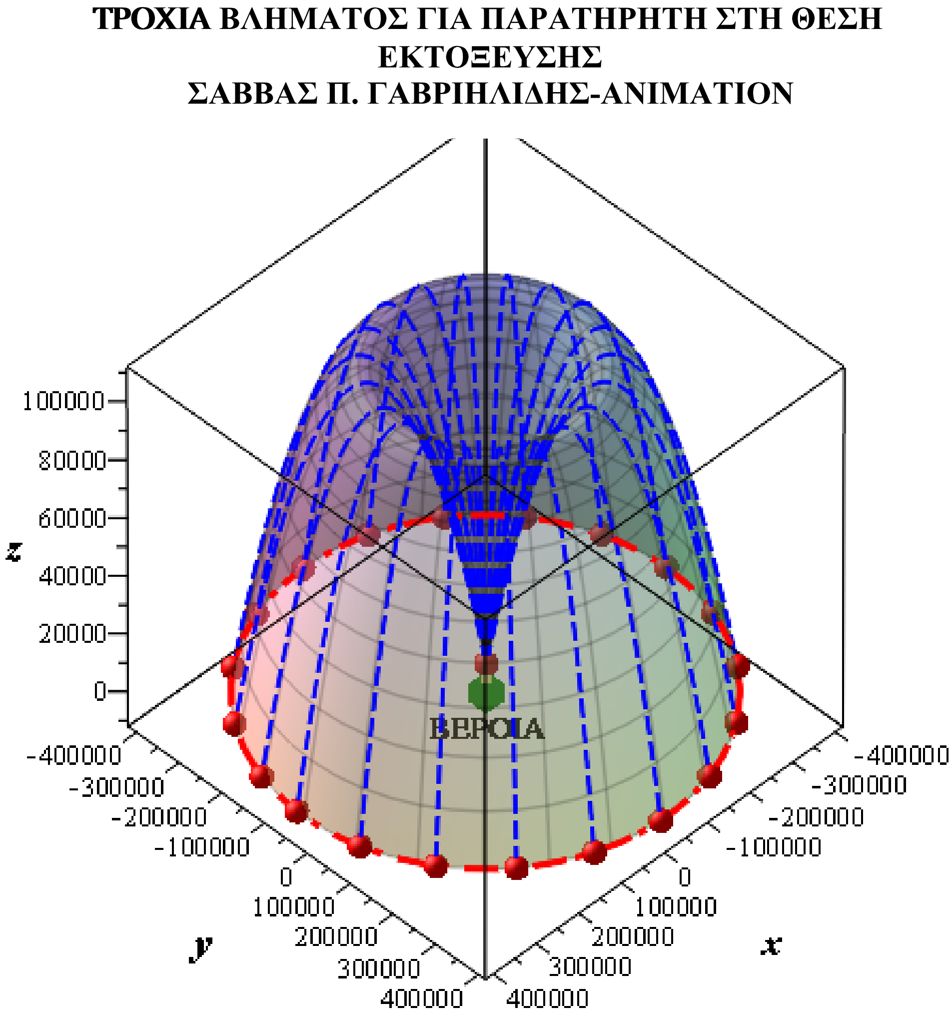
> $PAR1 := textplot3d([0, 0, -12000, \text{"ΒΕΡΟΙΑ"}], font=[arial, bold, 12]):$

> $B := animate\big(pointplot3d, [[\mathbf{(49)}, \mathbf{(50)}, \mathbf{(51)}], symbol=solidcircle, symbolsize=25, color=red], \beta=0..2\cdot \mathrm{Pi}, frames=80, trace=20\big):$

> $LIN := line([0, 0, 0], [0, 0, 10000], thickness=5):$

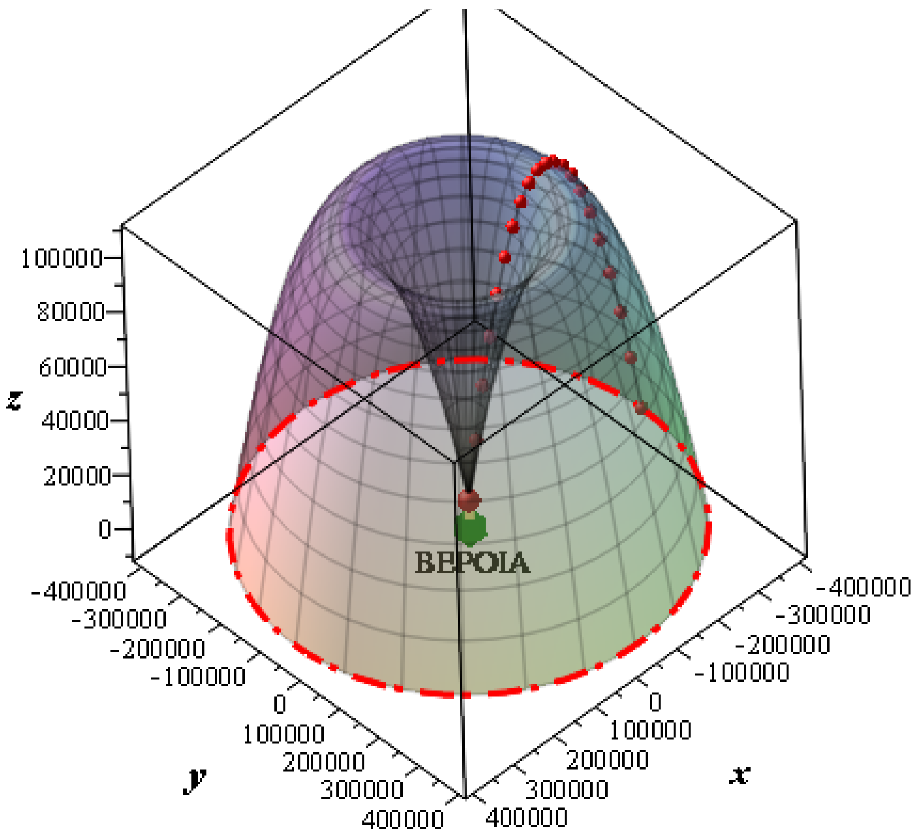
> $A := animate\big(spacecurve, [[\mathbf{(46)}, \mathbf{(47)}, \mathbf{(48)}], t=0..toriz, thickness=2, linestyle=3, color=blue], \beta=0..2\cdot \mathrm{Pi}, frames=80, trace=20\big):$

> *display*(*EPIFAN*, *A*, *B*, *C*, *LIN*, *BL1*, *PAR*, *PAR1*, *orientation* = [45, 45, 0], *scaling* = *unconstrained*, *labels* = [*x*, *y*, *z*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "ΤΡΟΧΙΑ ΒΛΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ΣΤΗ ΘΕΣΗ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗΣ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ-ANIMATION", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*], *axes* = *boxed*)



> *display*(*EPIFAN*, *C*, *LIN*, *BL1*, *PAR*, *PAR1*, *BLHMA*, *orientation* = [45, 45, 0], *scaling* = *unconstrained*, *labels* = [*x*, *y*, *z*], *labelfont* = [*arial*, *bold*, 14], *title* = "ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΑΤΡΟΧΙΑΣ ΒΛΗΜΑΤΟΣ\n ΓΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ΣΤΗ ΘΕΣΗ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗΣ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ-ANIMATION", *titlefont* = [*arial*, 12, *bold*], *axes* = *boxed*)

ΛΕΠΤΟΜΕΡΕΙΑ ΤΡΟΧΙΑΣ ΒΛΗΜΑΤΟΣ
ΓΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΤΗ ΣΤΗ ΘΕΣΗ ΕΚΤΟΞΕΥΣΗΣ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ-ANIMATION



>