

> `with(Physics[Vectors]) :`
 > `Setup(mathematicalnotation = true) :`
 > `with(plots) :`
 > `with(plottools) :`

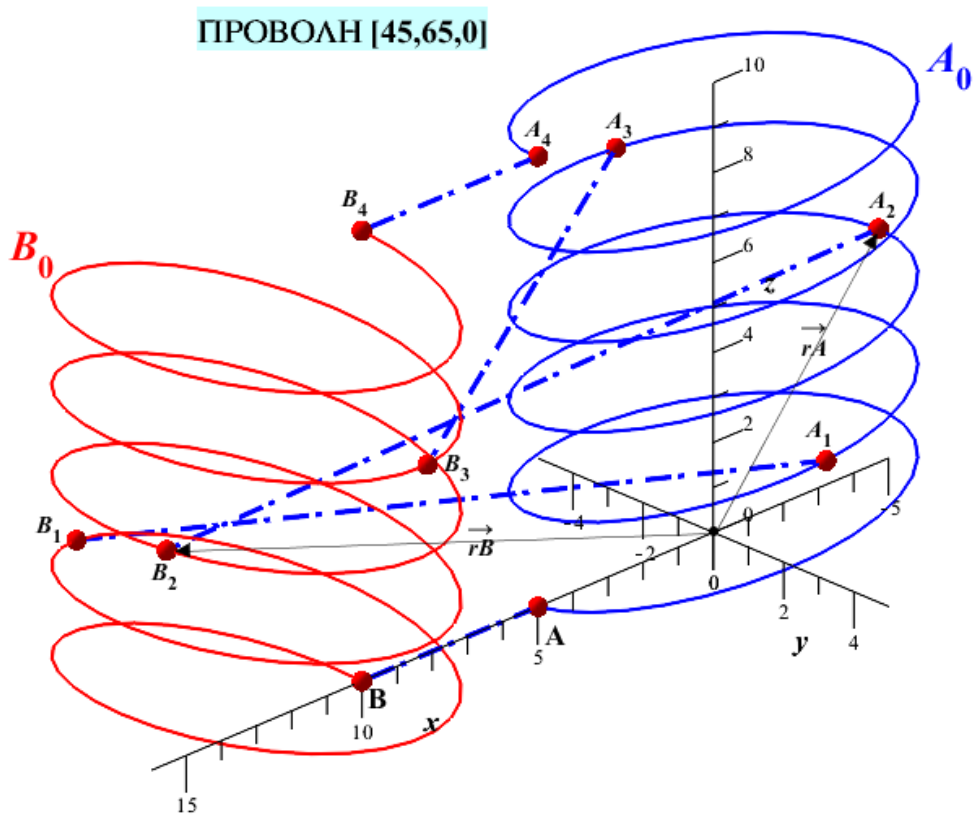
Θέμα :

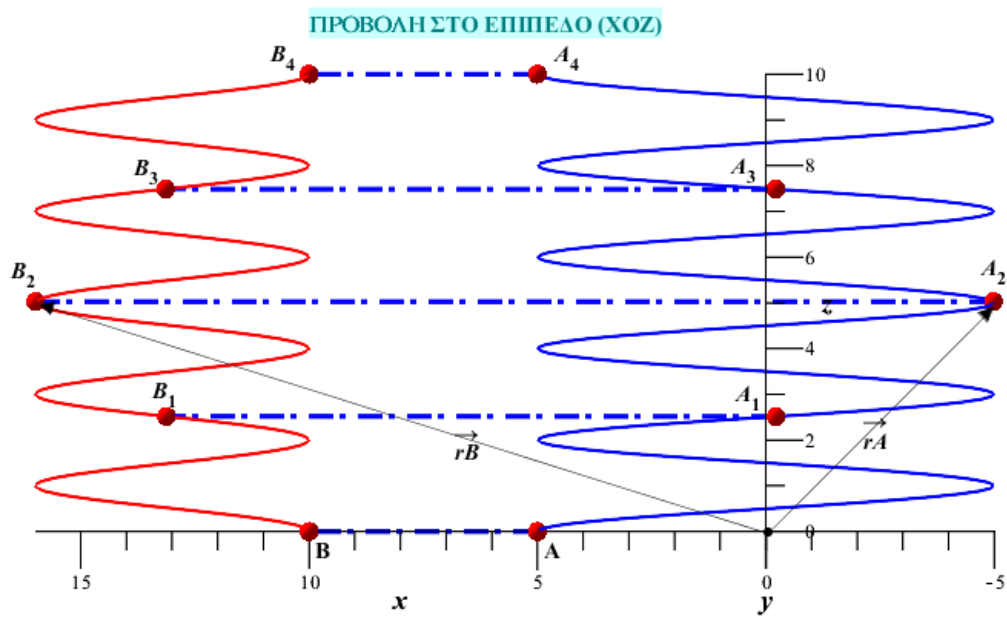
Κυκλικού Ελατηρίου φυσικού μήκους $5m$, με πέντε ελκώσεις, τα άκρα A, B , είναι υποχρεωμένα να κινούνται επί των ορθών Ελλειπτικών ελίκων A_0, B_0 ,

όπως φαίνεται στα παρατειθέμενα σχήματα .

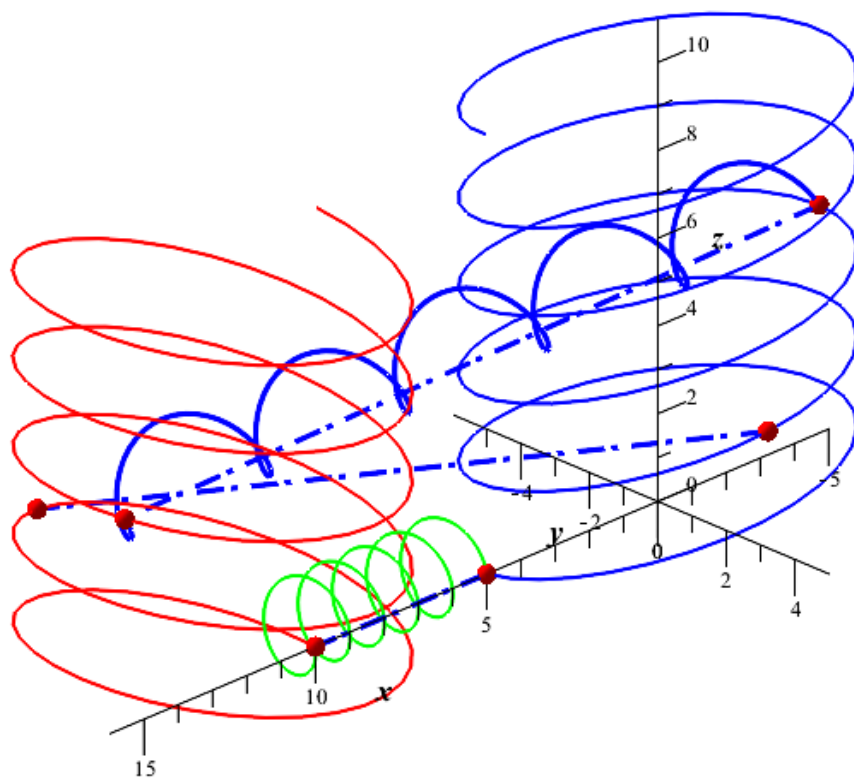
Η γωνιακή ταχύτητα των A, B , είναι ίση .

Να περιγραφεί η κίνηση και με animation .

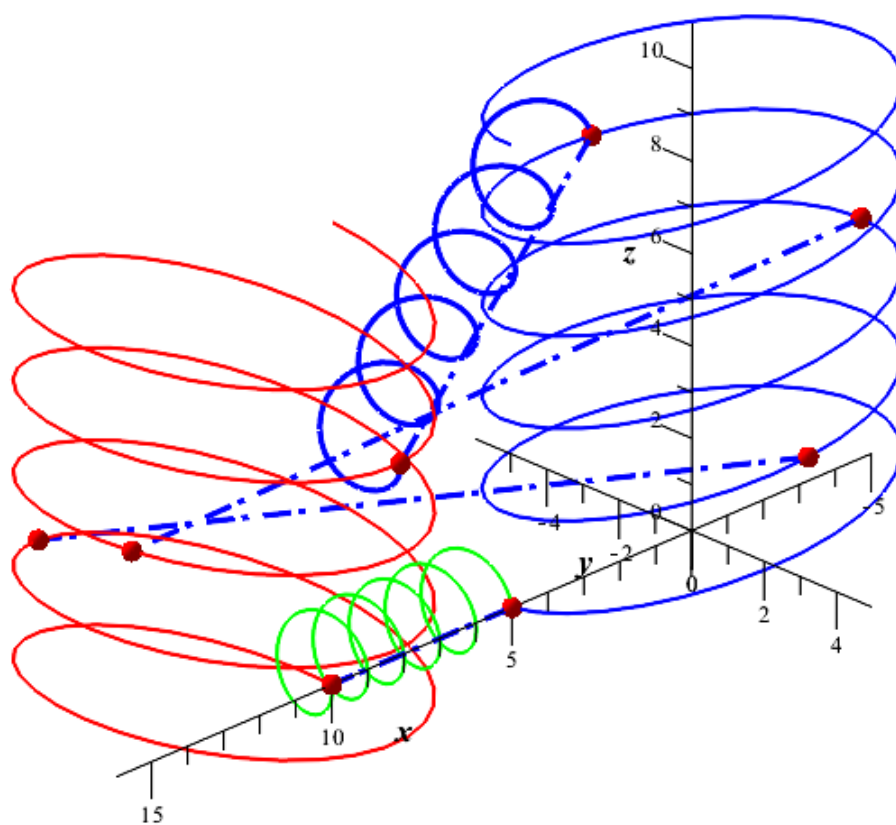




ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΟΔΗΓΟΥΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΛΙΚΕΣ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
 $\phi = 15.796$

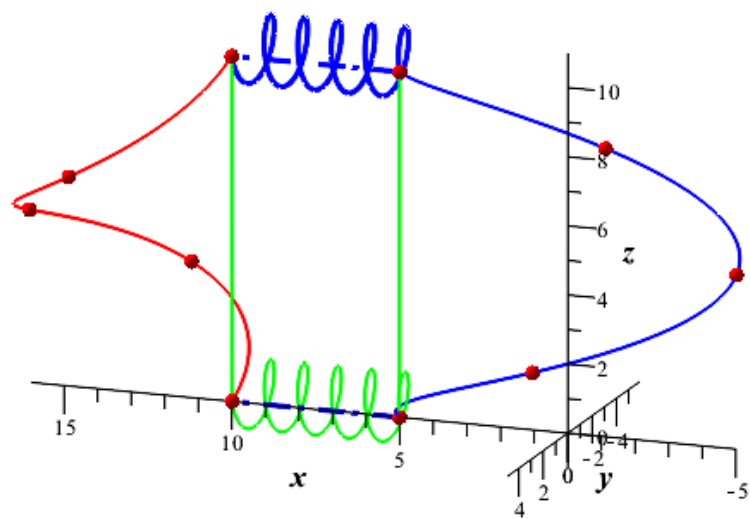


ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΟΔΗΓΟΥΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΛΙΚΕΣ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
 $\phi = 23.518$

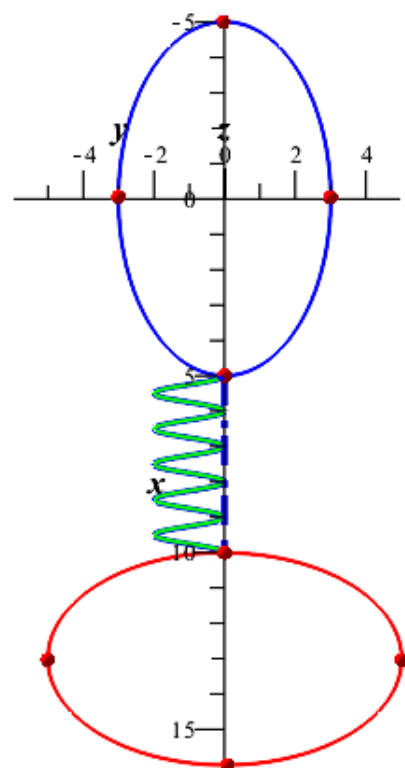


ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΟΔΗΓΟΥΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΛΙΚΕΣ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ

$$\phi = 6.2832$$



**ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΟΔΗΓΟΥΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΛΙΚΕΣ
ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (ΧΟΥ)
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ**



$$\begin{bmatrix} \vec{e1} \\ \vec{e2} \\ \vec{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) \hat{i} + \cos(b) \hat{j} + \cos(c) \hat{k} \\ \cos(d) \hat{i} + \cos(e) \hat{j} + \cos(f) \hat{k} \\ \cos(g) \hat{i} + \cos(h) \hat{j} + \cos(i) \hat{k} \end{bmatrix}$$

$$\vec{e1} = \cos(a) \hat{i} + \cos(b) \hat{j} + \cos(c) \hat{k}$$

$$\vec{e2} = \cos(d) \hat{i} + \cos(e) \hat{j} + \cos(f) \hat{k}$$

$$\vec{e3} = \cos(g) \hat{i} + \cos(h) \hat{j} + \cos(i) \hat{k}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) \vec{e1} + \cos(d) \vec{e2} + \cos(g) \vec{e3} \\ \cos(b) \vec{e1} + \cos(e) \vec{e2} + \cos(h) \vec{e3} \\ \cos(c) \vec{e1} + \cos(f) \vec{e2} + \cos(i) \vec{e3} \end{bmatrix}$$

$$\hat{i} = \cos(a) \vec{e1} + \cos(d) \vec{e2} + \cos(g) \vec{e3}$$

$$\hat{j} = \cos(b) \vec{e1} + \cos(e) \vec{e2} + \cos(h) \vec{e3}$$

$$\hat{k} = \cos(c) \vec{e1} + \cos(f) \vec{e2} + \cos(i) \vec{e3}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

$$A_x = A_{e1} \cos(a) + A_{e2} \cos(d) + A_{e3} \cos(g)$$

$$A_y = A_{e1} \cos(b) + A_{e2} \cos(e) + A_{e3} \cos(h)$$

$$A_z = A_{e1} \cos(c) + A_{e2} \cos(f) + A_{e3} \cos(i)$$

$$> b1 := 10$$

$$b1 := 10$$

(1)

$$> b2 := 10$$

$$b2 := 10$$

(2)

$$> b3 := 1$$

$$b3 := 1$$

(3)

$$> \left[5 \cdot \cos(\phi), 3 \cdot \sin(\phi), \frac{b1 \cdot \phi}{2 \cdot \text{Pi}} \right]$$

$$\left[5 \cos(\phi), 3 \sin(\phi), \frac{5 \phi}{\pi} \right]$$

(4)

$$> A[0] := \text{subs}(\phi = 1 \cdot t, (4))$$

$$A_0 := \left[5 \cos(t), 3 \sin(t), \frac{5 t}{\pi} \right]$$

(5)

$$> xA := (4)[1]$$

$$xA := 5 \cos(\phi)$$

(6)

$$> yA := (4)[2]$$

$$yA := 3 \sin(\phi)$$

(7)

$$> zA := (4)[3]$$

☞

$$zA := \frac{5\phi}{\pi} \quad (8)$$

$$> rA_ := xA_ \cdot i + yA_ \cdot j + zA_ \cdot k$$

$$\vec{rA} := 5 \cos(\phi) \hat{i} + 3 \sin(\phi) \hat{j} + \frac{5\phi}{\pi} \hat{k} \quad (9)$$

$$> \left[13 + 3 \cdot \cos(\text{Pi} + \phi), 5 \cdot \sin(\text{Pi} + \phi), \frac{b2 \cdot \phi}{2 \cdot \text{Pi}} \right]$$

$$\left[13 - 3 \cos(\phi), -5 \sin(\phi), \frac{5\phi}{\pi} \right] \quad (10)$$

$$> B[0] := \text{subs}(\phi = t, (10))$$

$$B_0 := \left[13 - 3 \cos(t), -5 \sin(t), \frac{5t}{\pi} \right] \quad (11)$$

$$> xB := (10)[1]$$

$$xB := 13 - 3 \cos(\phi) \quad (12)$$

$$> yB := (10)[2]$$

$$yB := -5 \sin(\phi) \quad (13)$$

$$> zB := (10)[3]$$

$$zB := \frac{5\phi}{\pi} \quad (14)$$

$$> rB_ := xB_ \cdot i + yB_ \cdot j + zB_ \cdot k$$

$$\vec{rB} := (13 - 3 \cos(\phi)) \hat{i} - 5 \sin(\phi) \hat{j} + \frac{5\phi}{\pi} \hat{k} \quad (15)$$

$$> AB := \text{simplify}(\text{sqrt}(((4)[1] - (10)[1])^2 + ((4)[2] - (10)[2])^2 + ((4)[3] - (10)[3])^2))$$

$$AB := \sqrt{233 - 208 \cos(\phi)} \quad (16)$$

**Τα Συνημίτονα κατεύθυνσης της Κινούμενης Ευθείας :
(AB) : και του Συστήματος Συντεταγμένων στο σημείο A_i .**

$$> rAB_ := rB_ - rA_$$

$$\vec{rAB} := \hat{i} (-8 \cos(\phi) + 13) - 8 \sin(\phi) \hat{j} \quad (17)$$

$$> e1_ := \frac{rAB}{AB}$$

$$\vec{e1} := \frac{\hat{i} (-8 \cos(\phi) + 13) - 8 \sin(\phi) \hat{j}}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \quad (18)$$

$$> e3_ := _k$$

$$\vec{e3} := \hat{k} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &> e2_ := e3_ \times e1_ \\ &\quad \vec{e2} := \frac{8 \sin(\phi) \hat{i}}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} + \left(-\frac{8 \cos(\phi)}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} + \frac{13}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \right) \hat{j} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &> e1_e2_ \\ &\quad 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &> e1_ \times e2_ \\ &\quad \hat{k} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &> cosa := e1_i \\ &\quad cosa := -\frac{8 \cos(\phi)}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} + \frac{13}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &> cosb := e1_j \\ &\quad cosb := -\frac{8 \sin(\phi)}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &> cosc := e1_k \\ &\quad cosc := 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &> cosd := e2_i \\ &\quad cosd := \frac{8 \sin(\phi)}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &> cose := e2_j \\ &\quad cose := -\frac{8 \cos(\phi)}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} + \frac{13}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &> cosf := e2_k \\ &\quad cosf := 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &> cosg := e3_i \\ &\quad cosg := 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &> cosH := e3_j \\ &\quad cosH := 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &> cosi := e3_k \\ &\quad cosi := 1 \end{aligned} \quad (31)$$

**Συντεταγμένες (X ,Y, Z) του κινούμενου Ελατηρίου
στο $[\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}]$:**

$$A_x = A_{e1} \cos(a) + A_{e2} \cos(d) + A_{e3} \cos(g)$$

$$A_y = A_{e1} \cos(b) + A_{e2} \cos(e) + A_{e3} \cos(h)$$

$$A_z = A_{e1} \cos(c) + A_{e2} \cos(f) + A_{e3} \cos(i)$$

$$bm := \frac{AB}{5}$$

$$> bm := \frac{AB}{5}$$

$$bm := \frac{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}}{5} \quad (32)$$

$$> X := xA + \frac{bm \cdot t}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \cos a + (-1 + \cos(t)) \cdot \cos d + \sin(t) \cdot \cos g$$

$$X := 5 \cos(\phi) \quad (33)$$

$$+ \frac{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)} \cdot t \left(-\frac{8 \cos(\phi)}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} + \frac{13}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \right)}{10 \pi}$$

$$+ \frac{8 (-1 + \cos(t)) \sin(\phi)}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}}$$

$$> Y := yA + \frac{bm \cdot t}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \cos b + (-1 + \cos(t)) \cdot \cos e + \sin(t) \cdot \cos h$$

$$Y := 3 \sin(\phi) - \frac{4 t \sin(\phi)}{5 \pi} + (-1 + \cos(t)) \left(-\frac{8 \cos(\phi)}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \right. \\ \left. + \frac{13}{\sqrt{233 - 208 \cos(\phi)}} \right) \quad (34)$$

$$> Z := zA + \frac{bm \cdot t}{2 \cdot \text{Pi}} \cdot \cos c + (-1 + \cos(t)) \cdot \cos f + \sin(t) \cdot \cos i$$

$$Z := \frac{5 \phi}{\pi} + \sin(t) \quad (35)$$

$$> \text{elathrio} := \text{animate}(\text{spacecurve}, [[X, Y, Z], t = 0 .. 5 \cdot 2 \cdot \text{Pi}, \text{ops}], \phi = 0 .. 2 \cdot \text{Pi}, \text{frames} = 180) :$$

$$> \left[\frac{bm \cdot t}{2 \cdot \text{Pi}}, -1 + \cos(t), \sin(t) \right] :$$

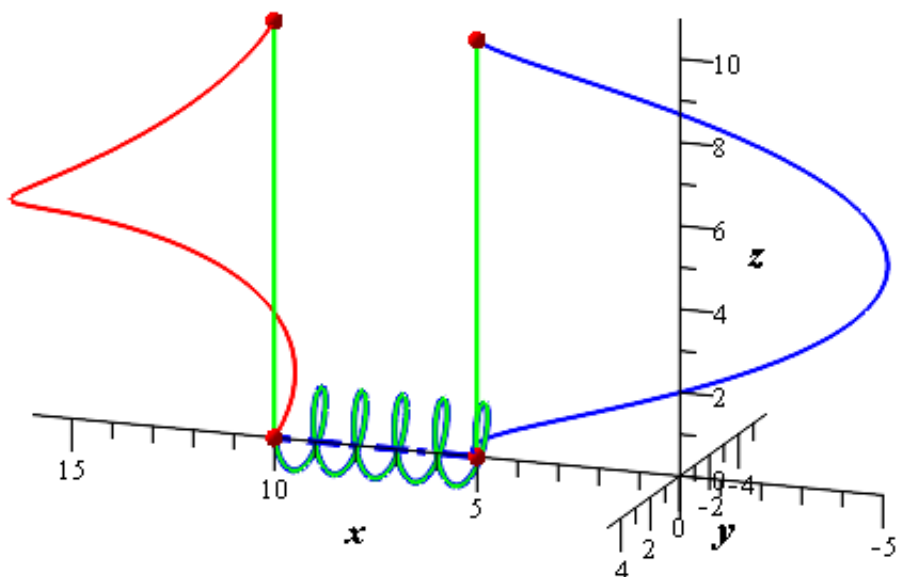
$$> EL1 := \text{spacecurve} \left(\left[5 \cdot \cos(\phi), 3 \cdot \sin(\phi), \frac{b1 \cdot \phi}{2 \cdot \text{Pi}} \right], \phi = 0 .. 2 \cdot \text{Pi}, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 2, \right.$$

```

numpoints = 160 ) :
> EL2 := spacecurve( [ 13 + 3*cos(Pi + phi), 5*sin(Pi + phi),  $\frac{b2 \cdot \phi}{2 \cdot \text{Pi}}$  ], phi = 0 .. 2*Pi, color = red,
thickness = 2, numpoints = 160 ) :
> EL3 := spacecurve( [  $5 + \frac{b3 \cdot \phi}{2 \cdot \text{Pi}}$ , -1 + cos(phi), sin(phi) ], phi = 0 .. 5*2*Pi, color = green, thickness
= 2, numpoints = 160 ) :
> ops1 := color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 10 :
> ops := color = blue, thickness = 3, numpoints = 160, labels = [x, y, z], labelfont = [arial, bold,
14], title
= "ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΟΔΗΓΟΥΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΛΙΚΕΣ\nΣΑΒΒΑΣ Π.
ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 14], scaling = constrained :
> opsLin := color = green, thickness = 2, linestyle = 1 :
> opsAKAB := color = blue, thickness = 3, linestyle = 4 :
> A := pointplot3d([5, 0, 0], ops1) :
> At := pointplot3d([5, 0, 10], ops1) :
> LAAt := line([5, 0, 0], [5, 0, 10], opsLin) :
> AA := animate( pointplot3d, [ [ 5*cos(phi), 3*sin(phi),  $\frac{b1 \cdot \phi}{2 \cdot \text{Pi}}$  ], ops1 ], phi = 0 .. 2*Pi, frames = 180,
trace = 4 ) :
> p1 := pointplot3d([5, 1, 0], ops1) :
> B := pointplot3d([10, 0, 0], ops1) :
> Bt := pointplot3d([10, 0, 10], ops1) :
> LBBt := line([10, 0, 0], [10, 0, 10], opsLin) :
> BB := animate( pointplot3d, [ [ 13 + 3*cos(Pi + phi), 5*sin(Pi + phi),  $\frac{b2 \cdot \phi}{2 \cdot \text{Pi}}$  ], ops1 ], phi = 0 .. 2
*Pi, frames = 180, trace = 4 ) :
> p2 := pointplot3d([10, 1, 0], ops1) :
> LA1 := line([5, 0, 0], [5, 1, 0], opsLin) :
> LB2 := line([10, 0, 0], [10, 1, 0], opsLin) :
> AKAB := line([5, 0, 0], [10, 0, 0], opsAKAB) :
> AABB := animate(spacecurve, [ [xA + m*(xB - xA), yA + m*(yB - yA), zA + m*(zB
- zA) ], m = 0 .. 1, opsAKAB ], phi = 0 .. 2*Pi, frames = 180, trace = 0 ) :
> display(EL1, EL2, EL3, A, B, AKAB, AA, BB, AABB, elathrio, At, Bt, LAAt, LBBt, scaling
= constrained, axes = normal, labels = [x, y, z], labelfont = [arial, bold, 14], orientation
= [110, 75, 0])

```

ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΟΔΗΓΟΥΣ
ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΛΙΚΕΣ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
 $\phi = 0$.



```
> display(EL1, EL2, EL3, A, B, AKAB, AA, BB, AAB, At, Bt, LAAt, LBBt, elathrio, scaling
= constrained, axes = normal, labels = [x, y, z], labelfont = [arial, bold, 14], orientation
= [0, 0, 0], title
= "ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΟΔΗΓΟΥΣ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΛΙΚΕΣ\nΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΟ
ΕΠΙΠΕΔΟ (ΧΟΥ)\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 14])
```

**ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ ΜΕ ΟΔΗΓΟΥΣ
ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΛΙΚΕΣ
ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ (ΧΟΥ)
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ**

