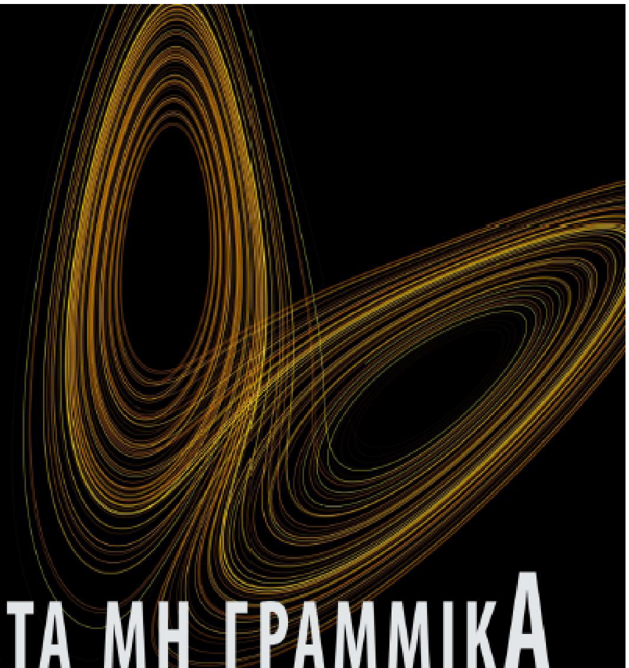
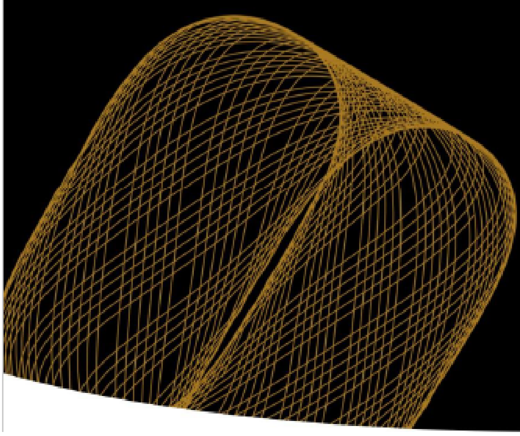


ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΒΟΥΓΙΑΤΖΗΣ & ΕΥΘΥΜΙΑ ΜΕΛΕΤΛΙΔΟΥ



Αγαπητέ κ. Γαβριηλίδη.
Πρώτα απ'ολα ευχαριστώ πολύ που δείξατε ενδιαφέρον για το βιβλίο.
Βρήκα το animation πάρα πολύ όμορφο - θα το δείχνω στους φοιτητές μου όταν κάνω το αντίστοιχο μάθημα.
Αν θέλετε να ασχοληθείτε λίγο περισσότερο θα ήταν ενδιαφέρον να προσομοιώσετε τον ταλαντωτή της παραγράφου 6.4.1 αλλά να προσθέσετε και μια εξωτερική περιοδική διέγερση - πχ το μήκος L να αυξομειώνεται με ένα ημίτονο. Το αποτέλεσμα θα είναι ποιοτικά αυτό που περιγράφεται στην 7.4.3.
Να είστε καλά.

Γιώργος Βουγιατζής.

Βιβλιογραφία :

1. Δημήτρης Σουρλάς Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών-Τμήμα Φυσικής :
   α) ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
   β) ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ και ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ με τη χρήση του Maple .
   γ) ΔΙΑΣΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
   δ) ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ και ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
2. Λεωνίδας Κ. Ρεσβάνης Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
   PHYSICS FOR SCIENTISTS & ENGINEERS
3. Π. Μ. Χατζηκωνσταντίνου Καθηγητής Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών
   ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

Α) Γεώργιος Μ. Νιτσιώτας Καθηγητής Πολυτεχνικής Σχολής Α.Π.Θ.
   ΜΕΓΑΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΟΣ

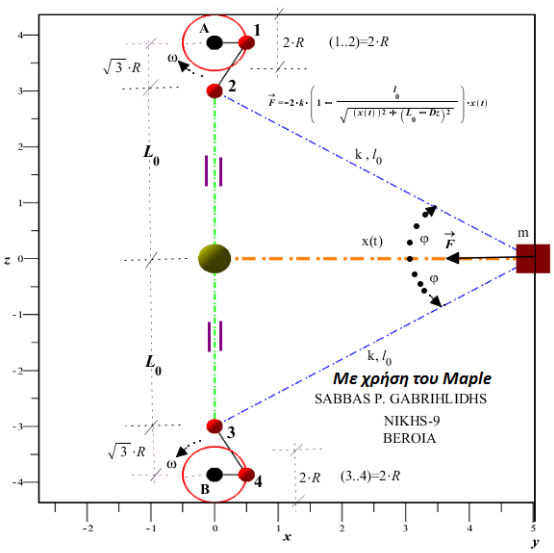
Θέμα :

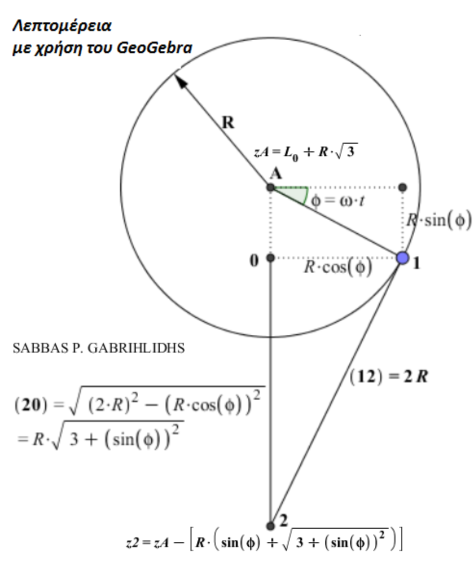
Σώμα μάζας m στη θέση $(L, 0)$ συνδέεται με δύο ίδια ελατήρια ,ελατηριακής σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0 .

Το άλλο άκρο **2** και **3** των ελατηρίων αντίστοιχα διεγείρεται με ημιτονοειδή περιοδικότητα πλάτους P_0 , όπως φαίνεται στο σχήμα .

Να περιγραφεί η κίνηση .(ΚΑΙ ΜΕ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE) .

Εξωτερική Ημιτονοειδής Διέγερση Πλάτους :P[0]=$2 \cdot R$





$Dz := R \cdot \left(\sin(\omega \cdot t) - \sqrt{3} + \sqrt{3 + (\sin(\omega \cdot t))^2}\right)$

$$Dz := R\left(\sin(\omega t) - \sqrt{3} + \sqrt{3 + \sin(\omega t)^2}\right)$$

$diff((1), t) = 0$

$$R\left(\cos(\omega t)\,\omega + \frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,\omega}{\sqrt{3 + \sin(\omega t)^2}}\right) = 0$$

$solve((2), t)$

$$\frac{1}{2}\frac{\pi}{\omega}, -\frac{1}{2}\frac{\pi}{\omega}$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

$maxDz := evalf(subs(t = (3)[1], (1)))$

$$maxDz := 1.267949192\,R$$

$minDz := evalf(subs(t = (3)[2], (1)))$

$$minDz := -0.732050808\,R$$

$diff((1), t\$2)$

$$-\sin(\omega t)\,\omega^2 - \frac{\sin(\omega t)^2\cos(\omega t)^2\,\omega^2}{\left(3 + \sin(\omega t)^2\right)^{3/2}} + \frac{\cos(\omega t)^2\,\omega^2}{\sqrt{3 + \sin(\omega t)^2}} - \frac{\sin(\omega t)^2\,\omega^2}{\sqrt{3 + \sin(\omega t)^2}}\Bigg)$$

$evalf(subs(t = (3)[1], (6)))$

$$-1.500000000\,R\,\omega^2$$

$evalf(subs(t = (3)[2], (6)))$

$$0.5000000000\,R\,\omega^2$$

Σκεπτικό :
Έχουμε Συμμετρική διάταξη .
Η Δύναμη που ενεργεί στο σώμα ,λόγω συμμετρίας των Ελατηριακών δυνάμεων είναι :

$$\vec{F} = -2 \cdot k \cdot (l - l_0) \cdot \cos(\varphi) = -2 \cdot k \cdot \left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \cdot l \cdot \cos(\varphi) :$$

όπου : k η ελατηριακή σταθερά ,
l το τρέχον μήκος των ελατηρίων ,
l_0 το φυσικό μήκος των ελατηρίων ,
φ η γωνία ως προς την διεύθυνση της κίνησης (όπως φαίνεται στο σχήμα).

Είναι :Λόγω υποχρεωτικής κίνησης των 2,3 επί του άξονα z :

$$Dz_{(2,3)} = R \cdot \left[\sin(\omega \cdot t) - \sqrt{3} + \sqrt{3 + (\sin(\omega \cdot t))^2}\right]$$

Με λίγη τριγωνομετρία .!

$$l = \sqrt{x(t)^2 + (L_0 - Dz)^2} :$$

$$\cos(\varphi) = \frac{x(t)}{l} :$$

Επομένως : $\vec{F} = -2 \cdot k \cdot \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x(t)^2 + (L_0 - Dz)^2}}\right) \cdot x(t) :$

ΛΥΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΣΚΗΣΗ Και με ΔΥΝΑΜΙΚΗ κατά Lagrange έχουμε τα ίδια Αποτελέσματα .

ΔΕΝ ΠΡΟΣΘΕΤΟΥΜΕ ΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ ΣΚΕΛΟΣ ΤΗΣ Δ.Ε. ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ .

ΤΗΝ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΤΗΝ ΛΑΒΑΜΕ ΥΠΟΨΗ ΔΙΑΜΟΡΦΩΝΟΝΤΑΣ ΤΗΝ $\vec{F}$.!!!

Είναι : $minl = L_0 - maxDz = L_0 - 1.267949192\,R$, βλ .ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ .

Ειδική περίπτωση : Το τρέχον μήκος των ελατηρίων να είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το φυσικό μήκος των ελατηρίων .

Δηλ. $l_0 < minl = L_0 - maxDz = L_0 - 1.267949192\ R$

```
>
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
> with(plots) :
> with(plottools) :
> with(DEtools) :
> L[0] := 3 :
> R := 1 :
> ω := 0.5 :
> l[0] := L_0 - 1.267949192 R :
> m := 10 :
> k := 10 :
> P[0] := 2·R :
```

$> Dz := R\cdot\left(\sin(\omega\cdot t) - \sqrt{3} + \sqrt{3 + (\sin(\omega\cdot t))^2}\right)$

$$Dz := \sin(0.5\,t) - \sqrt{3} + \sqrt{3 + \sin(0.5\,t)^2} \quad (1)$$

$> ode := m\cdot diff(x(t), t\$2) + 2\cdot k\cdot\left(1 - \frac{l[0]}{\mathrm{sqrt}\left((x(t))^2 + (L[0] - Dz)^2\right)}\right)\cdot x(t) = 0$

$$ode := 10\,\ddot{x}(t) + 20\left(1 - \frac{1.732050808}{\sqrt{x(t)^2 + \left(3 - \sin(0.5\,t) + \sqrt{3} - \sqrt{3 + \sin(0.5\,t)^2}\right)^2}}\right) x(t) = 0 \quad (2)$$

$> ics := x(0) = 5, D(x)(0) = 0$

$$ics := x(0) = 5, D(x)(0) = 0 \quad (3)$$

$> sol := dsolve(\{ode, ics\}, numeric, output = listprocedure)$

$$sol := [t = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, x(t) = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, \dot{x}(t) = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}] \quad (4)$$

$> sol[2](0)$

$$x(t)(0) = 5. \quad (5)$$

$> sol[3](0)$

$$(\dot{x}(t))(0) = 0. \quad (6)$$

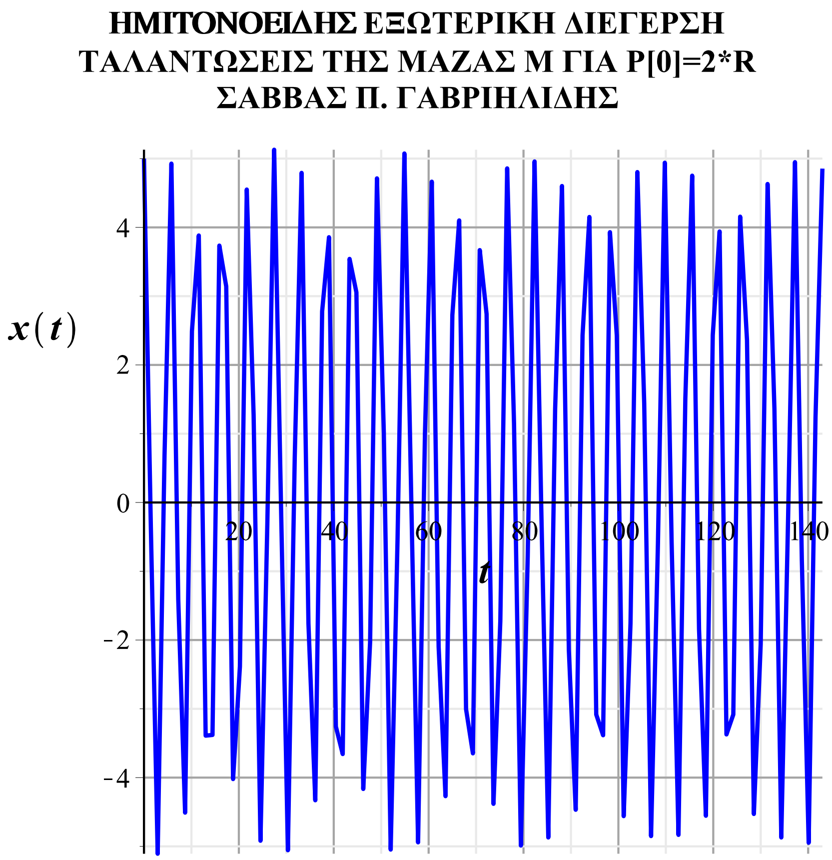
$> sol[2](31.4)$

$$x(t)(31.4) = -1.42214822432459 \quad (7)$$

$> f := rhs(sol[2](t)) = 0$

$$f := x(t)(t) = 0 \quad (8)$$

```
>
> odeplot(rhs(sol[2]), [t, x(t)], 0..143, axis = [gridlines], color = blue, thickness = 2, labels = [t,
      x(t)], labelfont = [arial, bold, 14], numpoints = 100, title
      = "ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ\nΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ Μ ΓΙΑ P[0]=
      2·R\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 12])
```



ΕΦΑΡΜΟΓΗ :(ode,ics).

> $xA := 0$

$$xA := 0 \tag{9}$$

> $zA := L_0 + \sqrt{3} \cdot R$

$$zA := 3 + \sqrt{3} \tag{10}$$

> $x1 := xA + R \cdot \cos(\omega \cdot t)$

$$x1 := \cos(0.5\ t) \tag{11}$$

> $z1 := zA - R \cdot \sin(\omega \cdot t)$

$$z1 := 3 + \sqrt{3} - \sin(0.5\ t) \tag{12}$$

> $x2 := 0$

$$x2 := 0 \tag{13}$$

> $z2 := z1 - \mathrm{sqrt}\left((2 \cdot R)^2 - (x1 - x2)^2\right)$

$$z2 := 3 + \sqrt{3} - \sin(0.5\ t) - \sqrt{4 - \cos(0.5\ t)^2} \tag{14}$$

> $x0 := 0$

$$x0 := 0 \tag{15}$$

> $z0 := 0$

$$z0 := 0 \tag{16}$$

> $x3 := 0$

$$x3 := 0 \tag{17}$$

> $z3 := -z2$

$$z3 := -3 - \sqrt{3} + \sin(0.5\ t) + \sqrt{4 - \cos(0.5\ t)^2} \tag{18}$$

> $xB := 0$

$$xB := 0 \tag{19}$$

> $zB := -L[0] - \sqrt{3} \cdot R$

$$zB := -3 - \sqrt{3} \tag{20}$$

> $x4 := x1$

$$x4 := \cos(0.5\ t) \tag{21}$$

> $z4 := -z1$

$$z4 := -3 - \sqrt{3} + \sin(0.5\ t) \tag{22}$$

>

> $xm := rhs(sol[2](t))$

$$xm := x(t)(t) \tag{23}$$

> $zm := 0$

$$zm := 0 \tag{24}$$

>

> $p0 := point([x0, 0, z0], color = olive, symbol = solidcircle, symbolsize = 20):$

> $pA := point([0, 0, zA], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 10):$

> $p1 := display(seq(point([x1, 0, z1], color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 10), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $p2 := display(seq(point([x2, 0, z2], color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 10), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $p3 := display(seq(point([x3, 0, z3], color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 10), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $p4 := display(seq(point([x4, 0, z4], color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 10), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $pB := point([0, 0, zB], color = black, symbol = solidcircle, symbolsize = 10):$

> $PM := display(seq(point([xm, 0, 0], color = red, symbol = \mathrm{solidbox}, \mathrm{symbolsize} = 30), t = 0..151, 1), insequence = true):$

>

> $LA1 := display(seq(line([0, 0, zA], [x1, 0, z1], color = \mathrm{black}, thickness = 1), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $L12 := display(seq(line([x1, 0, z1], [x2, 0, z2], color = \mathrm{black}, thickness = 1), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $L02 := display(seq(line([x0, 0, z0], [x2, 0, z2], color = \mathrm{green}, \mathrm{thickness} = 2, \mathrm{linestyle} = 4), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $\mathrm{L03} := display(seq(line([x0, 0, z0], [x3, 0, z3], color = \mathrm{green}, \mathrm{thickness} = 2, \mathrm{linestyle} = 4), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $L34 := display(seq(line([x3, 0, z3], [x4, 0, z4], color = \mathrm{black}, thickness = 1), t = 0..151, 1), insequence = true):$

> $LB4 := display(seq(line([0, 0, zB], [x4, 0, z4], color = \mathrm{black}, thickness = 1), t = 0..151, 1),$

insequence = true) :

> LOPM := display(seq(line([x0, 0, z0], [xm, 0, 0], color = coral, thickness = 4, linestyle = 4), t = 0 ..151, 1), insequence = true) :

> L2PM := display(seq(line([x2, 0, z2], [xm, 0, 0], color = blue, thickness = 1, linestyle = 4), t = 0 ..151, 1), insequence = true) :

> L3PM := display(seq(line([x3, 0, z3], [xm, 0, 0], color = blue, thickness = 1, linestyle = 4), t = 0 ..151, 1), insequence = true) :

>

> c1 := spacecurve([xA + R·sin(b), 0, zA + R·cos(b)], b = 0 ..2·Pi, thickness = 2, color = red) :

> c2 := spacecurve([xB + R·sin(b), 0 , zB + R·cos(b)], b = 0 ..2·Pi, thickness = 2, color = red) :

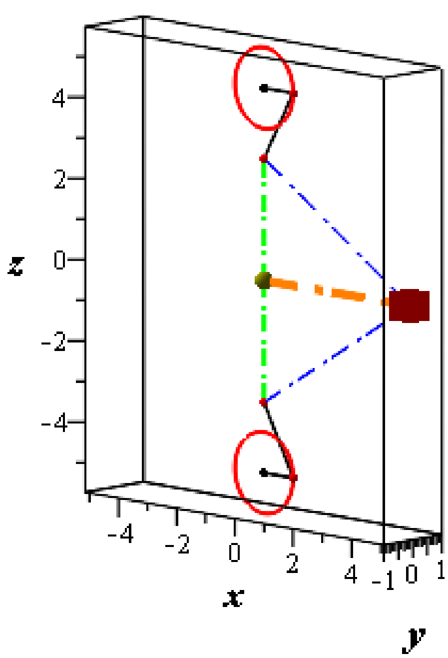
> la := sqrt((x2 − rhs(sol[2](t)))^2 + (0 − 0)^2 + (z2-0)^2)

$$la := \sqrt{x(t)(t)^2 + \left(3 + \sqrt{3} - \sin(0.5\, t) - \sqrt{4 - \cos(0.5\, t)^2}\right)^2} \qquad \textbf{(25)}$$

>

> display(p0, pA, p1, p2, p3, p4, pB, PM, LA1, L12, L02, L03, L34, LB4, c1, c2, LOPM, L2PM, L3PM, orientation = [-45, 80, 0], scaling = constrained, labels = [x, y, z], labelfont = [arial, 14, bold], title = "ANIMATE-ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 14])

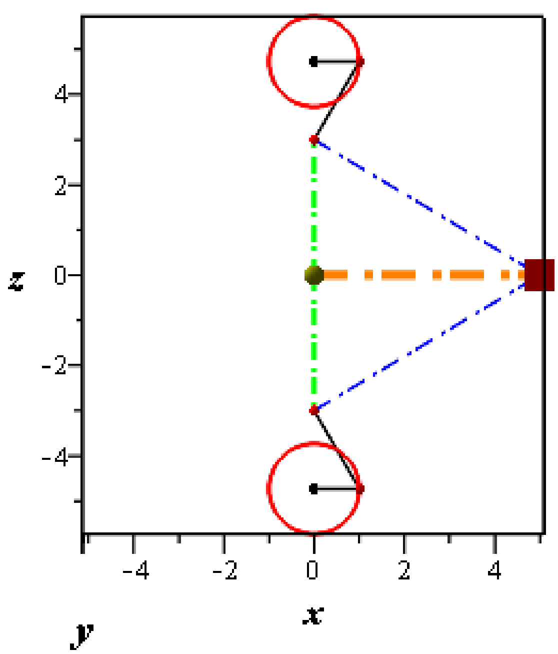
ANIMATE-ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



> display(p0, pA, p1, p2, p3, p4, pB, PM, LA1, L12, L02, L03, L34, LB4, c1, c2, LOPM, L2PM,

$L3PM$, $orientation = [0, 90, 90]$, $scaling = constrained$, $labels = [x, y, z]$, $labelfont = [arial, 14, bold]$, $title$
= "ΑΝΙΜΑΤΕ-ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ\nΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΟ (XOZ)", $titlefont = [arial, bold, 14]$)

ΑΝΙΜΑΤΕ-ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΔΙΕΓΕΡΣΗ
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ
ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΟ (XOZ)




```
> restart
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
> with(plots) :
> with(plottools) :
> with(DEtools) :
```

Το Σύστημα έχει έναν(1) Βαθμό Ελευθερίας (Β.Ε.)
Γενικευμένη Συντεταγμένη η x(t) .

> $X\_ := x(t) \cdot \_i$

$$\vec{X} := x(t)\ \hat{i} \tag{26}$$

> $v\_[m] := diff(X\_, t)$

$$\vec{v}_m := \dot{x}(t)\ \hat{i} \tag{27}$$

> $v\_[m].v\_[m]$

$$\dot{x}(t)^2 \quad (28)$$

> a_[m] := diff(X_, t$2)

$$\vec{a}_m := \ddot{x}(t)\ \hat{i} \quad (29)$$

> $L[0] := 3 :$

> $R := 1 :$

> $\omega := 0.5 :$

> $l[0] := \boldsymbol{L_0 - 1.267949192\, R} :$

> $m := 10 :$

> $k := 10 :$

> $P[0] := 2 \cdot R :$

> $Dz := R \cdot \left(\sin(\omega \cdot t) - \sqrt{3} + \sqrt{3 + (\sin(\omega \cdot t))^2}\right) :$

> $l = \sqrt{x(t)^2 + (L_0 - Dz)^2} :$

> $\vec{F} = -2 \cdot k \cdot \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x(t)^2 + (L_0 - Dz)^2}}\right) \cdot x(t) :$

> $Int\left(-2 \cdot k \cdot \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + (L_0 - Dz)^2}}\right) \cdot x, x\right) = int\left(-2 \cdot k \cdot \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + (L_0 - Dz)^2}}\right) \cdot x, x\right) = -2\, k \left(-l_0 \sqrt{Dz^2 - 2\, Dz\, L_0 + x^2 + L_0^2} + \frac{1}{2}\, x^2\right) :$

>

>

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Lagrange (1) .

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE

Εξισώσεις Lagrange

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\,t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\right) - \frac{\partial}{\partial q_i} L = 0\ ,\ i = 1, 2,...n \quad \Rightarrow \Delta.\text{E.}\ \left(\textit{Διαφορικές Εξισώσεις Κίνησης}\right)$$

Όπου :

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

> $T := \frac{1}{2} \cdot m \cdot \mathbf{(28)} :$

> $U := 2\, k \left(-l_0 \sqrt{Dz^2 - 2\, Dz\, L_0 + x(t)^2 + L_0^2} + \frac{1}{2}\, x(t)^2\right) :$

> $L := T - U$

$$L := 5\, \dot{x}(t)^2 + 34.64101616 \left(\left(\sin(0.5\, t) - \sqrt{3} + \sqrt{3 + \sin(0.5\, t)^2}\right)^2 - 6 \sin(0.5\, t) + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3 + \sin(0.5\, t)^2} + x(t)^2 + 9\right)^{1/2} - 10\, x(t)^2 \quad (30)$$

> $diff(L, \dot{x}(t))$

$$10\, \dot{x}(t) \quad (31)$$

> $diff(\mathbf{(31)}, t)$

$$10\,\ddot{x}(t) \qquad (32)$$

> diff(L, x(t))

$$\frac{34.64101616\,x(t)}{\left(\left(\sin(0.5\,t)-\sqrt{3}+\sqrt{3+\sin(0.5\,t)^2}\right)^2-6\sin(0.5\,t)+6\sqrt{3}-6\sqrt{3+\sin(0.5\,t)^2}+x(t)^2+9\right)^{1/2}}-20\,x(t) \qquad (33)$$

> **ode1 := (32)-(33)=0**

$$ode1 := 10\,\ddot{x}(t)-\frac{34.64101616\,x(t)}{\left(\left(\sin(0.5\,t)-\sqrt{3}+\sqrt{3+\sin(0.5\,t)^2}\right)^2-6\sin(0.5\,t)+6\sqrt{3}-6\sqrt{3+\sin(0.5\,t)^2}+x(t)^2+9\right)^{1/2}}+20\,x(t)=0 \qquad (34)$$

> ics1 := x(0) = 5, D(x)(0) = 0

$$ics1 := x(0)=5,\ D(x)(0)=0 \qquad (35)$$

> sol1 := dsolve({ode1, ics1}, numeric, output = listprocedure)

sol1 := [t = **proc**(t) ... **end proc**, x(t) = **proc**(t) ... **end proc**, $\dot{x}(t)$ = **proc**(t) ... **end proc**] **(36)**

> sol1[2](0)

$$x(t)(0) = 5. \qquad (37)$$

> sol1[3](0)

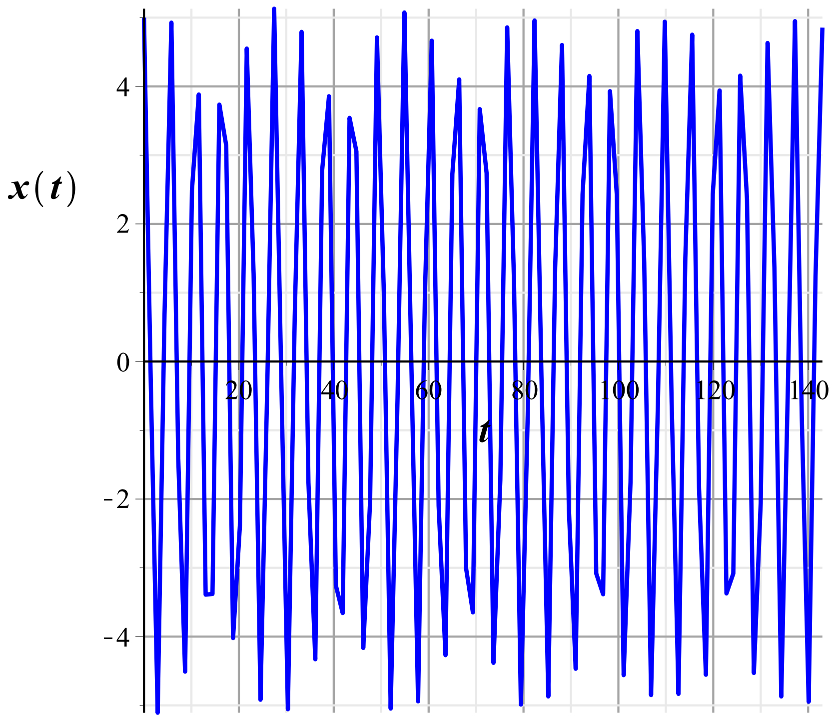
$$(\dot{x}(t))(0) = 0. \qquad (38)$$

> sol1[2](31.4)

$$x(t)(31.4) = -1.42214865350924 \qquad (39)$$

> odeplot(rhs(sol1[2]), [t, x(t)], 0..143, axis = [gridlines], color = blue, thickness = 2, labels = [t, x(t)], labelfont = [arial, bold, 14], numpoints = 100, title = "ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ\nΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ Μ ΓΙΑ P[0]= 2·R\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", titlefont = [arial, bold, 12])

ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ
ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ Μ ΓΙΑ P[0]=2*R
ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



>