```
> with(Physics[Vectors]) :
> Setup(mathematicalnotation = true) :
> with(plots) :
> with(plottools) :
> with(HTTP) :
```

ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΤΑ LAGRANGE

Εξισώσεις Lagrange

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\,t}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} L\right) - \frac{\partial}{\partial q_i} L = 0\ ,\ i = 1, 2, \ldots n \ \Rightarrow \Delta.\ .\quad (\qquad)$$

Όπου :

$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$

Η Λαγκραζιανή του Συστήματος και

$T :=$ Κινητική Ενέργεια του Συστήματος ως προς Επιλεγμένο Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς

$V :=$ Δυναμική Ενέργεια του Συστήματος ως προς Επιλεγμένο Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς

$q_i \quad i = 1, 2, ..n$, Γενικευμένες Συντεταγμένες Ανεξάρτητες Μεταξύ τους

$\dot{q}_i \quad i = 1, 2, ..n$, Γενικευμένες Ταχύτητες Ανεξάρτητες Μεταξύ τους

Εύρεση των Βαθμών Ελευθερίας (ΒΕ) Επίπεδου Μηχανισμού .

Το πλήθος των Βαθμών Ελευθερίας (ΒΕ) ενός Επιπέδου Μηχανισμού υπολογίζεται με τη βοήθεια της Εξίσωσης Kutzbach :

$$\mathbf{F} = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot f_1 - f_2$$

όπου :

F=πλήθος (ΒΕ) του μηχανισμού

n=πλήθος μελών (περιλαμβάνεται και η βάση)

f_1 = πλήθος συνδέσεων που διαθέτουν 1-ΒΕ

f_2 = πλήθος συνδέσεων που διαθέτουν 2-ΒΕ

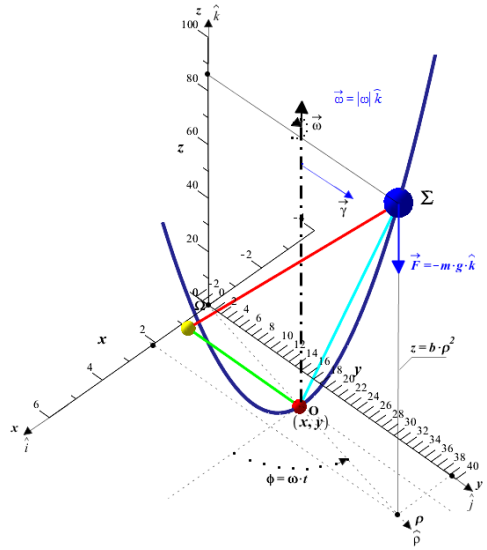
Συλλογιστική : Από το συνολικό πλήθος ΒΕ του μηχανισμού διαγράφονται οι Δεσμευμένοι ΒΕ .

ΒΑΣΙΚΟ : Γιά ΑΔΡΑΝΕΙΑΚΟ παρατηρητή τα Μοναδιαία Διανύσματα Μεταβάλλονται Συναρτήσει του Χρόνου .
Επομένως πρέπει να Υπολογίζουμε τις Παραγώγους των Μοναδιαίων Διανυσμάτων Συναρτήσει του Χρόνου .

ΘΕΜΑ :

Υλικό Σημείο Σ μάζης m είναι υποχρεωμένο να κινείται πάνω σε μία παραβολή **z=b*ρ^2**, η οποία περιστρέφεται γύρω από τον κατακόρυφο άξονά της με σταθερή γωνιακή ταχύτητα **ω** και ταυτόχρονα μετατοπίζεται κατά την διεύθυνση του Ωy με σταθερή επιτάχυνση **γ** .

Να περιγραφεί η κίνηση .



Δεδομένα :

Επειδή η περιστροφή γίνεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=$\dot{\phi}(t)$ ⇒, $\phi(t) = \omega\cdot t$, $\ddot{\phi}(t) = 0$:

> $P\_ := \rho(t)\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\_i + \rho(t)\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\_j + b\cdot(\rho(t))^2\cdot\_k$

$$\vec{P} := \rho(t)\cos(\omega t)\,\hat{i} + \rho(t)\sin(\omega t)\,\hat{j} + b\,\rho(t)^2\,\hat{k} \quad (1)$$

> $S\_ := x\cdot\_i + y\cdot\_j + \frac{1}{2}\cdot\gamma\cdot t^2\cdot\_j$

$$\vec{S} := x\,\hat{i} + \hat{j}\left(y + \frac{\gamma t^2}{2}\right) \quad (2)$$

> $R\_ := S\_ + P\_$

$$\vec{R} := \hat{i}\,(x + \rho(t)\cos(\omega t)) + \hat{j}\left(y + \frac{\gamma t^2}{2} + \rho(t)\sin(\omega t)\right) + b\,\rho(t)^2\,\hat{k} \quad (3)$$

> $\omega\_ = |\omega|\cdot\_k$

$$\vec{\omega} = |\omega|\,\hat{k} \quad (4)$$

>

Εξισώσεις κίνησης του Σ ως προς Ω(x,y,z) Αδρανειακό Σύστημα :

> $v\_[\Sigma] := diff(R\_, t)$

$$\vec{v}_\Sigma := \hat{i}\,(\dot{\rho}(t)\cos(\omega t) - \rho(t)\sin(\omega t)\,\omega) + \hat{j}\,(\gamma t + \dot{\rho}(t)\sin(\omega t) + \rho(t)\cos(\omega t)\,\omega) + 2\,b\,\rho(t)\,\hat{k}\,\dot{\rho}(t) \quad (5)$$

> $simplify((v\_[\Sigma].v\_[\Sigma]))$

$$4\,b^2\,\rho(t)^2\,\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\,\omega^2 + 2\,\gamma\,\rho(t)\cos(\omega t)\,\omega\,t + \dot{\rho}(t)^2 + 2\,\dot{\rho}(t)\,\gamma\sin(\omega t)\,t + \gamma^2\,t^2 \quad (6)$$

>

> $a\_[\Sigma] := simplify(diff(R\_, t\$2))$

$$\vec{a}_\Sigma := -\sin(\omega t)\,\rho(t)\,\hat{j}\,\omega^2 - \rho(t)\cos(\omega t)\,\hat{i}\,\omega^2 + 2\,b\,\rho(t)\,\hat{k}\,\ddot{\rho}(t) + 2\,b\,\dot{\rho}(t)^2\,\hat{k} - 2 \quad (7)$$

$$\dot{\rho}(t)\sin(\omega t)\,\hat{i}\,\omega + 2\,\dot{\rho}(t)\cos(\omega t)\,\hat{j}\,\omega + \ddot{\rho}(t)\sin(\omega t)\,\hat{j} + \ddot{\rho}(t)\cos(\omega t)\,\hat{i} + \gamma\hat{j}$$

I. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Lagrange :

> $T := \frac{1}{2}\cdot m\cdot$ **(6)**

$$T := \frac{1}{2}\left(m\left(4\,b^2\,\rho(t)^2\,\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\,\omega^2 + 2\,\gamma\rho(t)\cos(\omega t)\,\omega\,t + \dot{\rho}(t)^2 + 2\,\dot{\rho}(t)\,\gamma\sin(\omega t)\,t + \gamma^2\,t^2\right)\right) \quad \textbf{(8)}$$

> $U := m\cdot g\cdot b\cdot(\rho(t))^2$

$$U := m\,g\,b\,\rho(t)^2 \quad \textbf{(9)}$$

> $L := T - U$

$$L := \frac{1}{2}\left(m\left(4\,b^2\,\rho(t)^2\,\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\,\omega^2 + 2\,\gamma\rho(t)\cos(\omega t)\,\omega\,t + \dot{\rho}(t)^2 + 2\,\dot{\rho}(t)\,\gamma\sin(\omega t)\,t + \gamma^2\,t^2\right)\right) - m\,g\,b\,\rho(t)^2 \quad \textbf{(10)}$$

> $diff(L, \dot{\rho}(t))$

$$\frac{m\left(8\,b^2\,\rho(t)^2\,\dot{\rho}(t) + 2\,\dot{\rho}(t) + 2\,\gamma\sin(\omega t)\,t\right)}{2} \quad \textbf{(11)}$$

> $diff(\textbf{(11)}, t)$

$$\frac{m\left(16\,b^2\,\rho(t)\,\dot{\rho}(t)^2 + 8\,b^2\,\rho(t)^2\,\ddot{\rho}(t) + 2\,\ddot{\rho}(t) + 2\,\gamma\cos(\omega t)\,\omega\,t + 2\,\gamma\sin(\omega t)\right)}{2} \quad \textbf{(12)}$$

> $diff(L, \rho(t))$

$$\frac{m\left(8\,b^2\,\rho(t)\,\dot{\rho}(t)^2 + 2\,\rho(t)\,\omega^2 + 2\,\gamma\cos(\omega t)\,\omega\,t\right)}{2} - 2\,m\,g\,b\,\rho(t) \quad \textbf{(13)}$$

> $simplify\left(\frac{(\textbf{(12)}-\textbf{(13)})}{m}\right) = 0$

$$4\,b^2\,\rho(t)^2\,\ddot{\rho}(t) + 4\,b^2\,\rho(t)\,\dot{\rho}(t)^2 + 2\,g\,b\,\rho(t) - \rho(t)\,\omega^2 + \gamma\sin(\omega t) + \ddot{\rho}(t) = 0 \quad \textbf{(14)}$$

Η σχέση (15) γίνεται Διαφορική Εξίσωση (Δ.Ε.) της κίνησης:

> $\boldsymbol{ode := 4\,b^2\,\rho(t)\,\dot{\rho}(t)^2 + 4\,b^2\,\rho(t)^2\,\ddot{\rho}(t) + 2\,g\,b\,\rho(t) - \rho(t)\,\omega^2 + \sin(\omega t)\,\gamma + \ddot{\rho}(t) = 0}$

$$ode := 4\,b^2\,\rho(t)^2\,\ddot{\rho}(t) + 4\,b^2\,\rho(t)\,\dot{\rho}(t)^2 + 2\,g\,b\,\rho(t) - \rho(t)\,\omega^2 + \gamma\sin(\omega t) + \ddot{\rho}(t) = 0 \quad \textbf{(15)}$$

Επίλυση της Δ.Ε. (16) .

> $ode :=$ **(15)**

$$ode := 4\,b^2\,\rho(t)^2\,\ddot{\rho}(t) + 4\,b^2\,\rho(t)\,\dot{\rho}(t)^2 + 2\,g\,b\,\rho(t) - \rho(t)\,\omega^2 + \gamma\sin(\omega t) + \ddot{\rho}(t) = 0 \quad \textbf{(16)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ :

> $ode := subs(\{g = 9.80, b = 4, \omega = 0.5, \gamma = 1\}, ode)$

$$ode := 64\,\rho(t)^2\,\ddot{\rho}(t) + 64\,\rho(t)\,\dot{\rho}(t)^2 + 78.15\,\rho(t) + \sin(0.5\,t) + \ddot{\rho}(t) = 0 \quad \textbf{(17)}$$

> $ics := \rho(0) = 5, D(\rho)(0) = 0$

$$ics := \rho(0) = 5, D(\rho)(0) = 0 \quad \textbf{(18)}$$

> $sol := dsolve(\{ode, ics\}, numeric, output = listprocedure)$

$$sol := [t = \textbf{proc}(t) \ \ldots \ \textbf{end proc}, \rho(t) = \textbf{proc}(t) \ \ldots \ \textbf{end proc}, \dot{\rho}(t) = \textbf{proc}(t) \ \ldots \ \textbf{end proc}] \quad \textbf{(19)}$$

> $sol[2](0)$

$$\rho(t)(0) = 5. \quad \textbf{(20)}$$

> $sol[2](0.1)$

$$\rho(t)(0.1) = 4.99877946780277 \quad \textbf{(21)}$$

> $sol[2](0.2)$

$$\rho(t)(0.2) = 4.99511587783296 \quad \textbf{(22)}$$

> $sol[2](0.3)$

$$\rho(t)(0.3) = 4.98900353234232 \quad \textbf{(23)}$$

> $sol[2](1)$

$$\rho(t)(1) = 4.87638844085332 \quad \textbf{(24)}$$

> $sol[2](2)$

$$\rho(t)(2) = 4.48495473017480 \quad \textbf{(25)}$$

> $sol[2](3)$

$$\rho(t)(3) = 3.74231830227169 \quad \textbf{(26)}$$

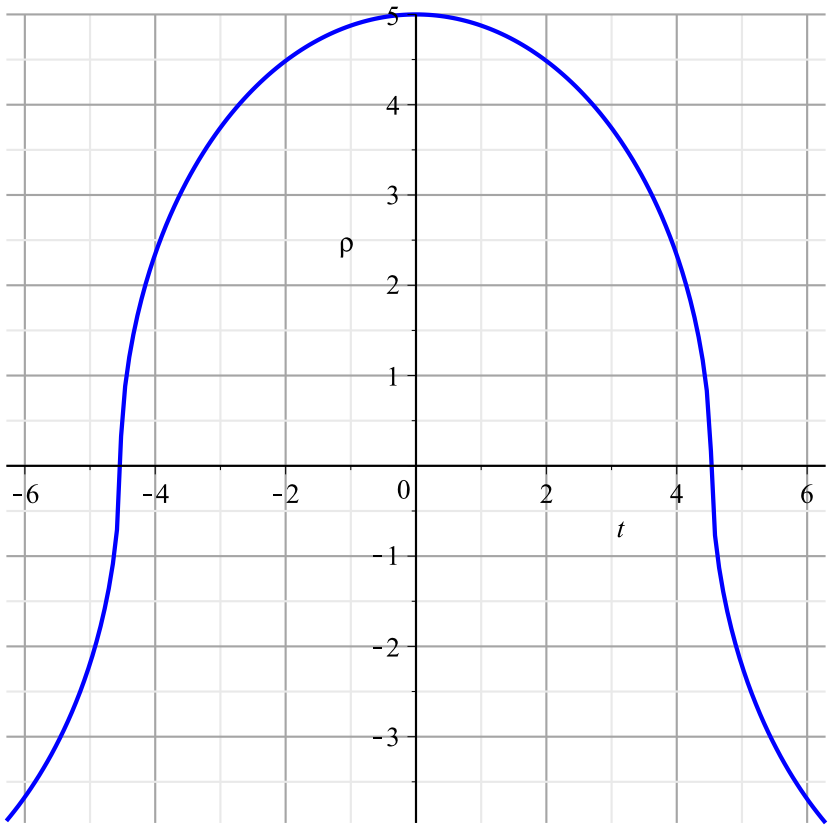
> $sol[2](4)$

$$\rho(t)(4) = 2.33462978753804 \quad \textbf{(27)}$$

> $sol[2](5)$

$$\rho(t)(5) = -2.21250853268266 \quad \textbf{(28)}$$

> $odeplot(rhs(sol[2]), [t, \rho(t)], -2 \cdot \mathrm{Pi} .. 2 \cdot \mathrm{Pi}, axis = [gridlines], color = blue, thickness = 2)$



ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΤΟ ΧΩΡΟ .

> $R\_ := subs(\{g = 9.80, b = 4, \omega = 1, \gamma = 1, x = 1, y = 1\}, R\_)$

$$\vec{R} := \hat{i}\,(1 + \rho(t)\cos(t)) + \hat{j}\left(1 + \frac{t^2}{2} + \rho(t)\sin(t)\right) + 4\,\rho(t)^2\,\hat{k} \tag{29}$$

> $x\Sigma := Component(R\_, 1)$

$$x\Sigma := 1 + \rho(t)\cos(t) \tag{30}$$

> $y\Sigma := Component(R\_, 2)$

$$y\Sigma := 1 + \frac{t^2}{2} + \rho(t)\sin(t) \tag{31}$$

> $z\Sigma := Component(R\_, 3)$

$$z\Sigma := 4\,\rho(t)^2 \tag{32}$$

> $p1 := point([1, 1, 0], color = \text{yellow}, \text{symbol} = \text{solidcircle}, \text{symbolsize} = 20)$:

>

> $p2 := display(p1)$:

> $C := display\left(seq\left(point\left(\left[1 + rhs(sol[2](t))\cdot\cos(t), 1 + \frac{t^2}{2} + (rhs(sol[2](t)))\cdot\sin(t), 4\right.\right.\right.$

$\cdot (rhs(sol[2](t)))^2\Big], color = blue, symbol = solidcircle, symbolsize = 40\Big), t = 0..12, 0.1\Big),$

$insequence = true, labels = [x, y, z]\Big):$

> $A := display\Big(seq\Big(spacecurve\Big(\Big[1 + \rho\cdot\cos(t), 1 + \frac{t^2}{2} + \rho\cdot\sin(t), 4\cdot\rho^2\Big], \rho = -5..5, color = navy, thickness = 4, labels = [x, y, z]\Big), t = 0..12, 0.1\Big), orientation = [45, 45, 0], insequence = true\Big):$

> $B := display\Big(seq\Big(point\Big(\Big[1, 1 + \frac{t^2}{2}, 0\Big], color = red, symbol = solidcircle, symbolsize = 20\Big), t = 0..12, 0.1\Big), insequence = true\Big):$

> $H := display\Big(seq\Big(line\Big([1, 1, 0], \Big[1 + rhs(sol[2](t))\cdot\cos(t), 1 + \frac{t^2}{2} + (rhs(sol[2](t)))\cdot\sin(t), 4\cdot(rhs(sol[2](t)))^2\Big], color = red, thickness = 3\Big), t = 0..12, 0.1\Big), insequence = true\Big):$

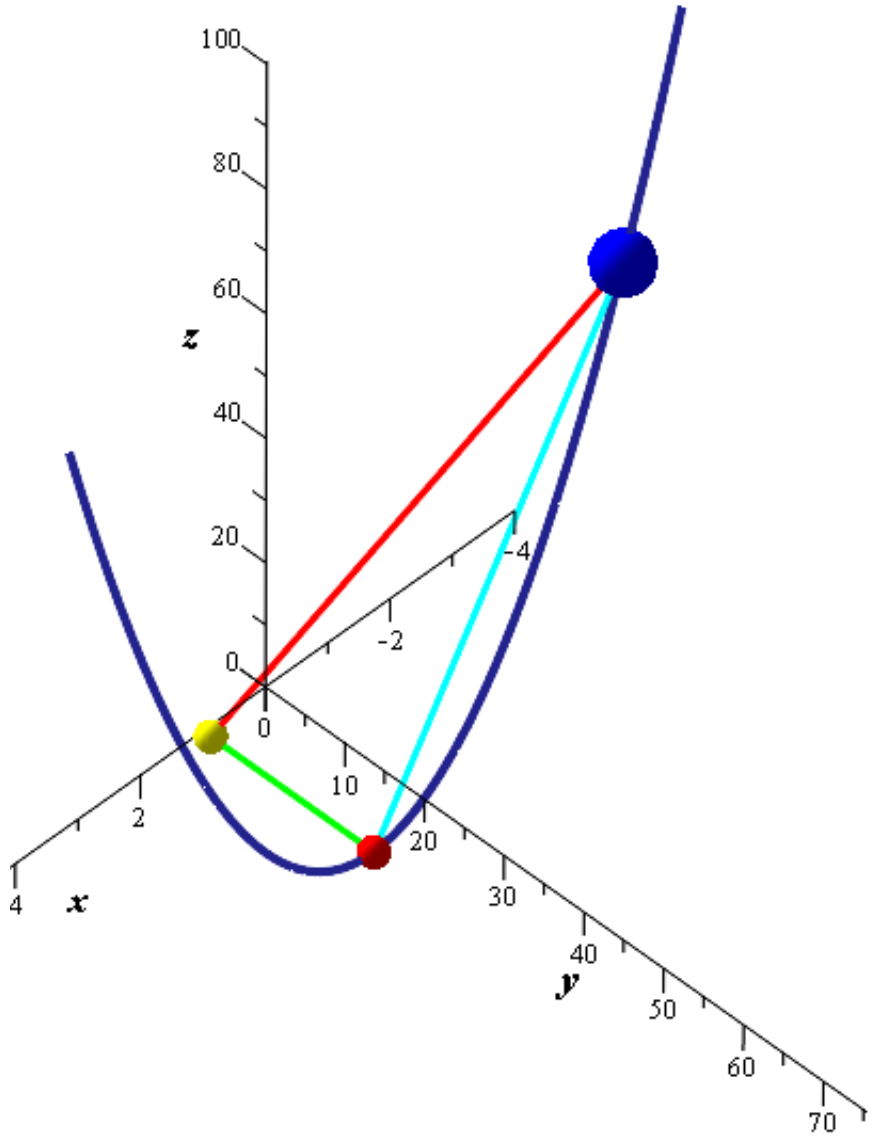
> $K := display\Big(seq\Big(line\Big([1, 1, 0], \Big[1, 1 + \frac{t^2}{2}, 0\Big], color = green, thickness = 3\Big), t = 0..12, 0.1\Big), insequence = true\Big):$

> $M := display\Big(seq\Big(line\Big(\Big[1, 1 + \frac{t^2}{2}, 0\Big], \Big[1 + rhs(sol[2](t))\cdot\cos(t), 1 + \frac{t^2}{2} + (rhs(sol[2](t)))\cdot\sin(t), 4\cdot(rhs(sol[2](t)))^2\Big], color = cyan, thickness = 3\Big), t = 0..12, 0.1\Big), insequence = true\Big):$

> $display(A, B, C, H, K, M, p1, title$
"ΑΝΙΜΑΤΙΟΝ-ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ-ΜΕΤΑΤΟΠΙΖΟΜΕΝΗ\nΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ", $titlefont = [arial, 14, bold], labels = [x, y, z], labelfont = [arial, bold, 14], axes = normal)$

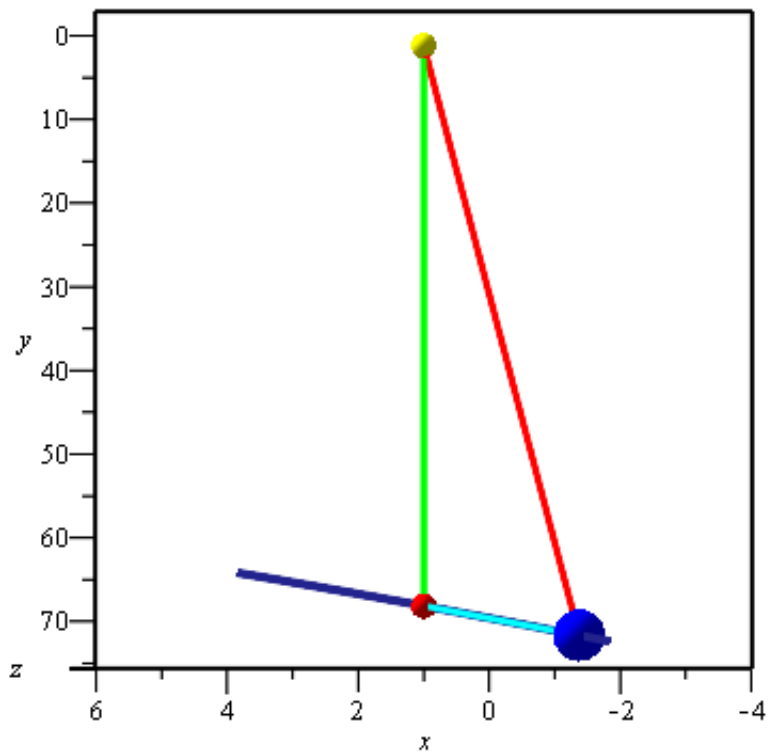
ΑΝΙΜΑΤΙΟΝ-ΠΑΡΑΒΟΛΗ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗ-ΜΕΤΑΤΟΠΙΖΟΜΕΝΗ

ΣΑΒΒΑΣ Π. ΓΑΒΡΙΗΛΙΔΗΣ



> *display*(*A*, *B*, *C*, *H*, *K*, *M*, *p1*, *orientation* = [90, 0, 0], *title* = "ANIMATE ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΟ (xOy)", *titlefont* = [*arial*, 14, *bold*])

ANIMATE ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΤΟ (xOy)



>